

CÁLCULO APLICADO

Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO III



Patricia Salinas · Juan Antonio Alanís · Ricardo Pulido
Francisco Santos · Julio César Escobedo · José Luis Garza

CÁLCULO APLICADO

Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO III

CÁLCULO APLICADO

Competencias matemáticas a través de contextos

TOMO III

Norma Patricia Salinas Martínez

Juan Antonio Alanís Rodríguez

José Luis Garza García

Ricardo Pulido Ríos

Francisco Xavier Santos Leal

Julio César Escobedo Mireles



Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo III.

Norma Patricia Salinas Martínez,
Juan Antonio Alanís Rodríguez,
José Luis Garza García, Ricardo Pulido Ríos,
Francisco Xavier Santos Leal,
Julio César Escobedo Mireles

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:

Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:

Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica:

Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:

Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español:

Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:

Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:

Rafael Pérez González

Editora:

Cinthia Chávez Ceballos

Diseño de portada:

Daniela Torres Arroyo

Imagen de portada:

Instituto Tecnológico de Monterrey (ITESM)

Composición tipográfica:

Humberto Núñez Ramos

© D.R. 2013 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Corporativo Santa Fe Av. Santa Fe núm. 505, piso 12 Col. Cruz Manca, Santa Fe C.P. 05349, México, D.F. Cengage Learning™ es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Datos para catalogación bibliográfica:

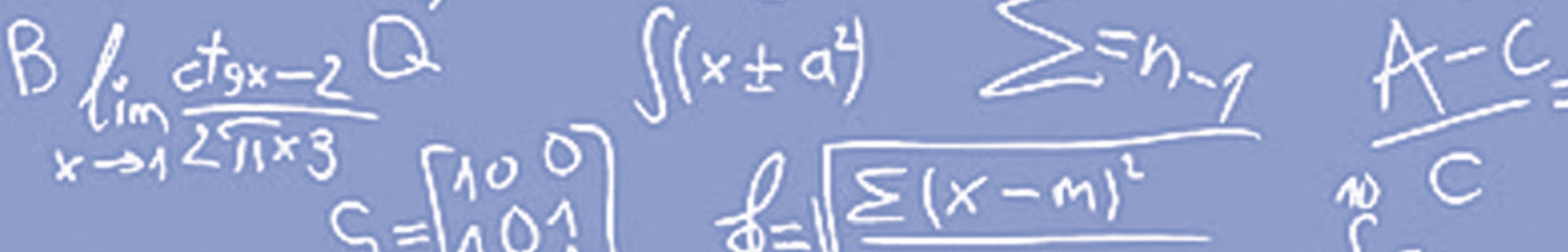
Salinas Martínez Norma Patricia *et al.*

Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo III.

ISBN: 978-607-481-911-3

Visite nuestro sitio en:

<http://latinoamerica.cengage.com>



Contenido

Prefacio

Unidad 1: Gráficas en el espacio

Tema 1.1 Sistemas de referencia para el espacio

Situación-Problema 1 (SP-1)	4
Discusión de la Situación-Problema 1	5
Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 1	6
Situación-Problema 2	7
Discusión de la Situación-Problema 2	8
Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 2	12
<i>Tarea 1</i>	14

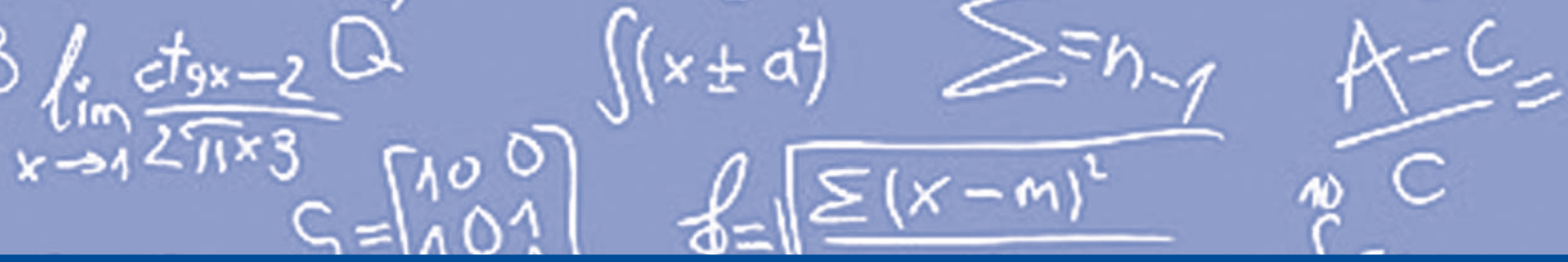
Tema 1.2 Flujo y funciones de dos variables

Situación-Problema 3 (SP-3)	18
Discusión de la Situación-Problema 3	19
Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 3	20
Situación-Problema 4 (SP-4)	20
Discusión de la Situación-Problema 4	21
Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 4	24
<i>Tarea 2</i>	35

Tema 1.3 Funciones de dos variables, otros contextos

Situación-Problema 5 (SP-5)	37
Discusión de la Situación-Problema 5	38
Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 5	41
<i>Tarea 3</i>	55

vii	Tema 1.4 Gráficas de funciones de dos variables y de ecuaciones de tres variables	59
2	Situación-Problema 6 (SP-6)	59
	Discusión de la Situación-Problema 6	60
4	Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 6	62
	<i>Tarea 4</i>	77
	Unidad 2: Introducción a las derivadas, diferenciales e integrales en el cálculo de varias variables	80
	Tema 2.1 Derivadas parciales	82
	Situación-Problema 7 (SP-7)	82
	Discusión de la Situación-Problema 7	83
	Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 7	87
	<i>Tarea 5</i>	91
	Tema 2.2 Modelo lineal	94
	Situación-Problema 8 (SP-8)	94
	Discusión de la Situación-Problema 8	95
	Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 8	100
	Situación-Problema 9 (SP-9)	114
	Discusión de la Situación-Problema 9	115
	<i>Tarea 6</i>	116
	Tema 2.3 Función potencial y teorema fundamental de las integrales de línea	119
	Situación-Problema 10 (SP-10)	119
	Discusión de la Situación-Problema 10	120



Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 10	126	Unidad 3: Teoremas fundamentales para los campos vectoriales	176
Resolución de ecuaciones diferenciales exactas	133	Tema 3.1 Fórmula general para el flujo y teorema de la divergencia	178
<i>Tarea 7</i>	<i>136</i>	Situación-Problema 12 (SP-12)	178
Tema 2.4 Derivada direccional, curvas de máximo crecimiento y líneas de un campo	140	Discusión de la Situación-Problema 12	180
Situación-Problema 11 (SP-11)	140	Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 12	184
Discusión de la Situación-Problema 11	141	<i>Tarea 9</i>	<i>225</i>
Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 11	143	Tema 3.2 Circulación y teorema del rotacional	235
Regla de la cadena	170	Situación-Problema 13 (SP-13)	235
<i>Tarea 8</i>	<i>172</i>	Discusión de la Situación-Problema 13	236
		Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 13	239
		<i>Tarea 10</i>	<i>265</i>

Prefacio

CÁLCULO APLICADO Competencias matemáticas a través de contextos TOMO III

Este libro corresponde al tomo III de la serie de Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos. Con esta obra se culmina una propuesta que destaca el qué, cómo y para qué enseñar-aprender el Cálculo de una y varias variables.

La obra refleja nuestro interés por lograr en los estudiantes el aprecio del conocimiento matemático en su calidad de herramienta útil para resolver problemas en contextos reales afines a sus aspiraciones académicas; de esta forma respondemos a la cuestión de *para qué* se enseña o se aprende Cálculo.

Qué enseñar o aprender de Cálculo se construye en atención al *para qué*. Nociones, procedimientos y objetos matemáticos surgen como herramientas óptimas para el tratamiento de las problemáticas propuestas.

Cada tomo de esta colección se centra en una problemática cuyo tratamiento provoca un quehacer matemático donde nociones, procedimientos y objetos matemáticos encuentran una razón de ser. En el tomo I se analiza la problemática de predecir el valor de una magnitud que está cambiando. El tratamiento a esta predicción conduce a construir y dar significado a nociones y procedimientos asociados a la razón de cambio y al cambio acumulado. Las nociones de derivada e integral junto con los procesos de derivación e integración surgen con el significado adecuado y preciso para esta práctica.

En el tomo II, la atención se centra en la problemática de calcular el valor de una magnitud asociada a un todo, dividiéndolo en partes. El tratamiento a esta problemática da lugar al surgimiento de la noción de diferencial como el valor de una magnitud infinitamente pequeña, junto con el de suma o integral. Dividir el todo en partes infinitamente pequeñas, calcular las magnitudes correspondientes a ellas y sumarlas es parte de un proceso medular que responde precisamente al requerimiento de la problemática en cuestión. La idea de tomar un elemento diferencial para luego calcular la magnitud completa (*la íntegra, la entera*) integrando, surge de esta misma práctica. Es importante mencionar que la idea de la toma del elemento diferencial constituye una estrategia frecuentemente utilizada en ingeniería para explicar fórmulas o conceptos propios de ésta. De hecho, la consideración para la enseñanza-aprendizaje de estas nociones y procedimientos, que constituyen poderosas herramientas para la comprensión profunda de los fenómenos que se estudian en ingeniería, establece una distancia significativa entre esta propuesta y las tradicionales en cuanto éstas ni siquiera reconocen la existencia de tales herramientas matemáticas.

En este tomo III se considera la problemática de dar sustento matemático o, dicho de otra manera, de *matematizar* dos nociones fundamentales de la Física: el *flujo* y la *circulación*. Surgidas de la Hidrodinámica, estas nociones fueron pronto utilizadas en otras áreas de la

Física, por ejemplo: del flujo eléctrico, circulación del campo magnético, flujo de calor, etc. Para demostrar la importancia que tienen estas dos nociones para la Física y, por lo tanto, para la ingeniería, basta señalar lo que afirma Richard Feynman en su libro de Física, volumen 2: “Solamente con estas dos nociones —flujo y circulación— podremos describir de una vez las leyes de la electricidad y el magnetismo”.

En el tomo actual buscamos que el estudiante logre comprender la lectura que en términos de flujo y circulación se da en la Física en el estudio de fenómenos de diversa naturaleza con las diferentes representaciones matemáticas que la acompañan. Así, por ejemplo, si bien es cierto que las leyes de la electricidad y el magnetismo pueden describirse en términos de flujo y circulación, es importante que el estudiante comprenda el porqué de las expresiones matemáticas involucradas en estas leyes.

Ahora bien, *cómo* lograr tal propósito corresponde con la forma en que van construyéndose los objetos matemáticos en atención a problemáticas que, iniciando con el tratamiento a situaciones particulares, simples y conocidas, desembocan en aquellas donde la generalidad predomina. Así, aunque la idea es arribar finalmente a la expresión matemática del *flujo* de un campo en general con la que conceptos como el flujo del campo eléctrico, por ejemplo, son representados, el estudio del flujo se inicia con el fenómeno que originó el término: el flujo de agua, que en principio resulta familiar al estudiante.

El campo de velocidades del agua en movimiento dará paso a la idea de campo vectorial en general. El cálculo de flujo en situaciones simples como aquellas donde el campo de velocidades es constante y la superficie a través de la cual se calcula es plana, devendrá en el cálculo del flujo de un campo a través de una superficie curva en general. Con la misma idea de transitar de lo restrictivo, aunque simple y familiar, a lo más general, el primer acercamiento a la *circulación* es mediante el concepto de trabajo en su versión más simple: el trabajo efectuado por un campo de fuerzas constante en dirección de un desplazamiento rectilíneo; eventualmente la operación de calcular el trabajo es extendido al caso de tener un campo y una curva en general.

En este tránsito, del campo de fuerzas o de velocidades constantes a campos vectoriales en general, del desplazamiento rectilíneo al curvo, de superficies planas a curvas en general, se despliega el pensamiento infinitesimal. Valorado ya en los tomos anteriores como una poderosa herramienta para la significación y construcción de conceptos clave del Cálculo de una variable, como la derivada, la integral y el Teorema fundamental del Cálculo, aprenderemos ahora productivas extensiones de las consideraciones geométrico algebraicas de ese pensamiento, en el análisis y construcción de objetos más elaborados acorde con los nuevos requerimientos problemáticos. Así, como las curvas en lo infinitamente pequeño son rectas y el valor de una magnitud (la razón de cambio) se supone constante en un tramo infinitesimal, las superficies curvas son planas en lo infinitamente pequeño, y un campo vectorial puede suponerse constante sobre un área infinitesimal de una superficie.

De hecho, las ideas de flujo y circulación llevadas a lo infinitamente pequeño, mediante el pensamiento infinitesimal, dan paso a la construcción de “nuevas derivadas” como la divergencia y el rotacional de un campo y a sus respectivos teoremas, el de la divergencia de Gauss y el del rotacional de Stokes, y con ellos a una forma poderosa para la caracterización de los campos vectoriales; entre éstos, por supuesto, el eléctrico y el magnético.

Si comparáramos este libro con uno tradicional de Cálculo de varias variables, podríamos decir que en cuanto a objetos matemáticos se trata, contienen lo mismo: derivadas parciales, derivada direccional, funciones de varias variables, integrales de línea, de superficie, de volumen, gradiente, divergencia y rotacional; son comunes en este espacio y cualquier otro.

La diferencia que ofrece esta obra es *cómo* estos objetos se construyen y estructuran, dando lugar a un *qué*, y a pesar de poder nombrarlos aquí, aquí se les ha dotado de significados más “ricos”. Se da un enfoque del *para qué* de acuerdo con la matemática, es decir, como una herramienta útil para el estudio y comprensión de los fenómenos propios de las carreras universitarias. Esto nos diferencia de los libros tradicionales, en los que parece que el afán es aumentar el edificio matemático por sí y mostrar lo que a su parecer es lo impecable de su razonamiento, el cual, por cierto, excluye aquel pensamiento infinitesimal por cuestiones filosóficas en desuso. Si se piensa que en la Física, y, por lo tanto, en la ingeniería este pensamiento infinitesimal es reconocido y utilizado frecuentemente, los estudiantes entenderán las dificultades que deberán sortear para aprender las herramientas matemáticas necesarias que aplicarán en los cursos de ingeniería.

Los autores

CÁLCULO APLICADO
Competencias matemáticas a través de contextos
TOMO III

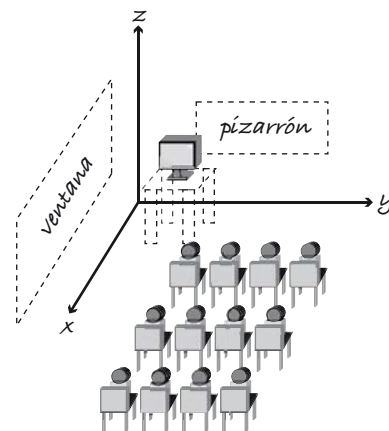
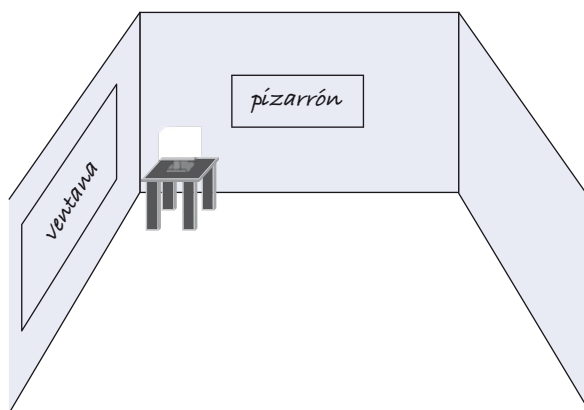
1.1

Sistemas de referencia para el espacio

El Cálculo que hemos revisado en los primeros dos tomos de esta obra, ese aparato coherente de nociones, procesos y resultados alrededor del estudio de la relación entre dos magnitudes o variables y que en el **plano** encuentra el contexto adecuado para representarse geoméricamente, puede extenderse para considerar una variable adicional, ampliando así sus posibilidades como herramienta útil para abordar problemas. En esta extensión, el **espacio** es ahora el contexto geométrico más adecuado para representar sus nociones y resultados. En este primer tema de la Unidad 1, nos familiarizaremos con el espacio (tridimensional) y las coordenadas que ayudan a identificar en él diferentes posiciones y lugares. Como veremos, con el sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares, representadas por x , y y z , se define de manera única cada posición en el espacio, pero existen otros sistemas de coordenadas con los cuales se logra el mismo objetivo. La naturaleza del fenómeno que se quiera estudiar determina cuáles son las coordenadas del espacio más adecuadas para hacerlo, por eso en este tema hemos incluido también la coordenada r (cilíndrica) y la coordenada ρ (esférica). Iniciamos nuestro estudio con la siguiente Situación-Problema.

Situación-Problema 1 (SP-1)

El salón de clases puede utilizarse como modelo de un sistema de referencia con el cual podemos indicar posiciones en el espacio; se puede elegir tres planos y en relación con estos ubicar las posiciones: el plano xy (donde está el piso), el plano yz (donde está el pizarrón) y el plano xz (donde está la pared a la izquierda de los estudiantes).



Utilicemos la siguiente convención:

El plano yz divide al espacio en dos partes: atrás y adelante; con los valores de la variable x indicamos qué tan atrás ($x < 0$) o adelante ($x > 0$) se encuentra algún punto en relación con el plano yz . Con $x = 0$ indicamos los puntos que están únicamente en el plano yz .

El plano xz divide al espacio en dos partes: izquierda y derecha; con los valores de la variable y señalamos qué tan a la izquierda ($y < 0$) o a la derecha ($y > 0$) se ubica algún punto respecto al plano xz . Con $y = 0$ indicamos los puntos que están solamente en el plano xz .

El plano xy divide al espacio en dos partes: abajo y arriba; con los valores de la variable z indicamos qué tan abajo ($z < 0$) o arriba ($z > 0$) se encuentra algún punto en relación con el plano xy . Con $z = 0$ indicamos los puntos que están exactamente en el plano xy .

1. En cuanto a este sistema de referencia, ¿cuáles serían los valores aproximados en metros de las variables x , y y z correspondientes a tu posición en el salón?
2. Discute las diferencias y similitudes que tienen los valores de las variables x , y y z relativas a las posiciones de tus compañeros que están en la primera fila.
3. ¿En qué se diferencian las coordenadas de tus compañeros de la última fila respecto a los de la primera?
4. ¿Cuál es la variable que indica la posición relativa al plano yz ? Indica, en términos de esta variable, la posición de los alumnos de la primera y última filas.
5. Considerando las posiciones de tus compañeros de la primera fila, ¿qué variable utilizarías para diferenciarlas unas de otras? Indica, en términos de esta variable, las posiciones de tus compañeros de la primera fila.
6. ¿En qué se diferencian las coordenadas de los alumnos de la primera fila en el salón que está encima del nuestro respecto a la posición de tus compañeros de la primera fila?
7. ¿Cuál es la variable que indica la posición relativa al plano yz ? Indica, en términos de esta variable, la posición de los alumnos de la primera fila, tanto en nuestro salón como en el salón por encima del nuestro.

Discusión de la Situación-Problema 1

Cada persona u objeto en este salón de clases ocupa un lugar en el espacio cuya posición puede ser descrita en términos de las distancias a los planos de referencia elegidos. Así, cada uno de nosotros se encuentra a cierta distancia (aproximada, teniendo en cuenta el punto de nuestro cuerpo desde donde empezamos a medir) de la pared del pizarrón (plano yz), ésta es la coordenada x de nuestra ubicación en el espacio. De igual forma, nuestra distancia al plano xz (pared a la izquierda del pizarrón) es la coordenada y . Finalmente, nuestra distancia al piso (plano xy) es la coordenada z . En este último caso es claro que los valores pueden variar sustancialmente dependiendo del punto de nuestro cuerpo que elijamos; por ejemplo, si lo ubicamos en nuestros pies, z sería 0, pero si lo ubicáramos en la parte superior de nuestra cabeza, z sería nuestra altura (si estuviéramos de pie).

Por supuesto que distintos valores de las coordenadas corresponden a distintas posiciones. Por ejemplo, los estudiantes de la primera fila, aunque podría decirse que tienen (aproximadamente) la misma coordenada x (distancia a la pared del pizarrón) y z (distancia al piso), tienen valores significativamente distintos de la coordenada y (distancia a la pared izquierda, relativa a los estudiantes).

Un estudiante en la primera fila se distingue, en cuanto a coordenadas se refiere, de cualquier otro ubicado en la última fila por tener un valor distinto de x (distancia a la pared del pizarrón). La diferencia entre las posiciones de los compañeros de la primera fila la establece la variable y (posición relativa a la pared izquierda). Las posiciones de los estudiantes de la primera fila de este salón, comparadas con las de los estudiantes de la primera fila del salón que está encima de él, tendrán un valor menor de z .

Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 1

1. Coordenadas cartesianas

En relación con tres planos coordenados, cada punto del espacio está determinado por las tres distancias a éstos. Estas distancias forman las coordenadas (relativas a esos tres planos de referencia) del punto.

Por supuesto que si cambiamos de planos, es decir, cambiamos el sistema de referencia, las coordenadas cambiarán. Las posiciones de los puntos son relativas a los sistemas de referencia.

Elegir tres planos perpendiculares entre sí como sistema de referencia origina las llamadas **coordenadas cartesianas**, o **rectangulares**.

2. Otras coordenadas

Se pueden tener otros sistemas de referencia distintos del sistema rectangular, por ejemplo:

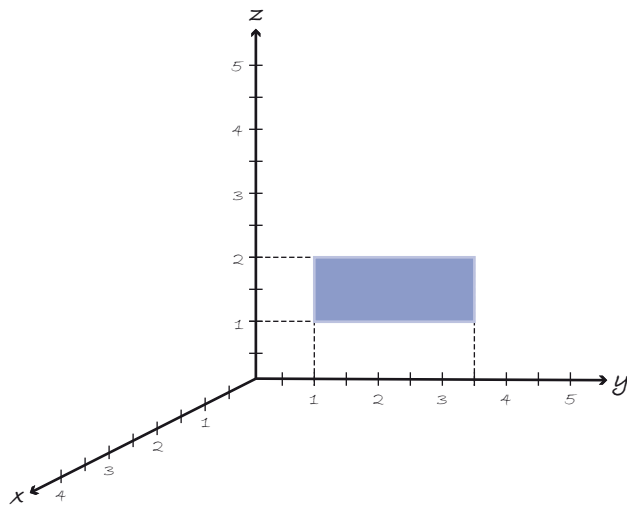
- a) Si se elige un punto en el espacio como referencia, cada posición en el espacio tiene una cierta distancia a ese punto. Todos los puntos del espacio que están a la misma distancia del punto elegido forman una esfera. Esta distancia es una de las llamadas **coordenadas esféricas**.
- b) Si fijamos una recta en el espacio, la distancia de un punto del espacio a esta recta constituye una de las llamadas **coordenadas cilíndricas**; el nombre proviene del hecho de que todos los puntos del espacio con la misma distancia a la recta forman un cilindro.

Más adelante volveremos con estas nuevas coordenadas y veremos que resultan muy convenientes para describir cierto tipo de fenómenos en distintas áreas de la ciencia.

3. Regiones

Se puede describir posiciones de objetos delimitando los valores de las coordenadas de los puntos que forman parte de éstos. Si volvemos al escenario del salón de clases y utilizamos el sistema de referencia ya establecido, podemos describir, por ejemplo, la posición del pizarrón (ve la figura de la página 7), de esta manera:

- a) Para todos los puntos del pizarrón su coordenada x es 0, porque el pizarrón está en el plano yz y los valores de la coordenada x indican qué tan alejado está un punto de este plano. De hecho, la ecuación del plano yz es $x = 0$, es decir, todos los puntos del espacio cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x = 0$ forman el plano yz .
- b) Todos los puntos del pizarrón tienen un valor de la coordenada y de acuerdo con su distancia a la pared izquierda o plano xz ; los puntos de la orilla izquierda del pizarrón tienen el valor menor porque están más cerca del plano xz ; los de la derecha, el valor mayor. Se puede decir que todos los puntos del pizarrón deben satisfacer la condición siguiente para el valor de y : $1 \leq y \leq 3.5$, pensando en metros.



c) Como z indica qué tan alejados están los puntos del piso o del plano xy , es claro que z debe cumplir (según la figura anterior) la condición: $1 \leq z \leq 2$.

Así, se puede decir que los puntos del pizarrón están caracterizados, en cuanto a su posición, por las siguientes condiciones: $x = 0$; $1 \leq y \leq 3.5$ y $1 \leq z \leq 2$.

Podemos resumir de la siguiente manera lo que hemos hecho hasta ahora: establecer, a través de las condiciones que deben cumplir las coordenadas x , y y z , la ubicación (relativa a nuestro sistema de referencia) de objetos y personas.

En la siguiente situación-problema procederemos al revés: daremos condiciones (en forma de ecuaciones o desigualdades) que deben cumplir las coordenadas y determinaremos las regiones del espacio cuya ubicación queda determinada por esas condiciones.

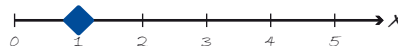
Situación-Problema 2 (SP-2)

1. Obtén la gráfica de la ecuación $x = 1$ en:
 - a) El espacio unidimensional (un eje)
 - b) El espacio bidimensional (dos ejes)
 - c) El espacio tridimensional (tres ejes)
2. Considera la expresión $2 \leq x \leq 5$. Identifica los puntos cuyas coordenadas satisfacen la expresión en:
 - a) El eje x
 - b) El plano xy
 - c) El espacio tridimensional xyz
3. Considera las expresiones: $2 \leq x \leq 5$ y $1 \leq y \leq 4$. Identifica la forma que tiene la colección de todos los puntos que cumplen simultáneamente ambas expresiones en:
 - a) El plano xy
 - b) El espacio tridimensional xyz

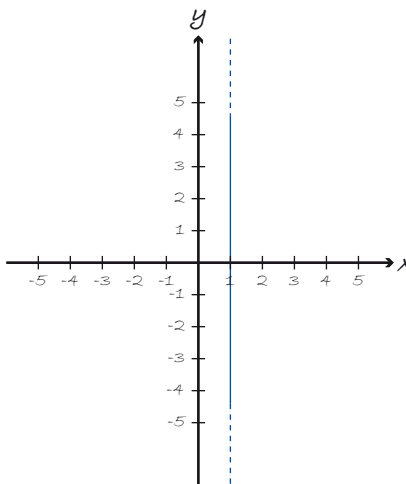
4. Identifica todos los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas satisfacen las expresiones: $2 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 4$ y $0 \leq z \leq 4$.

Discusión de la Situación-Problema 2

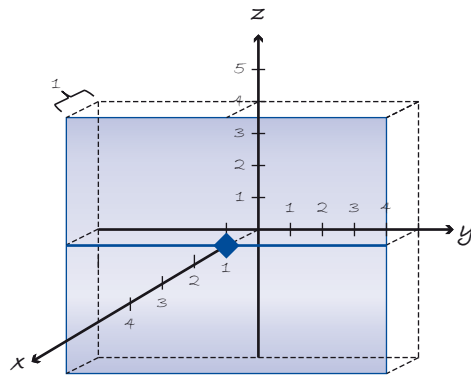
La expresión $x = 1$ adquiere diferentes significados según el contexto en el que aparezca. Puede entenderse, por ejemplo, como la solución de la ecuación lineal de primer orden $x - 1 = 0$, o como una de las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - 1 = 0$. También $x = 1$ puede verse como una ecuación en la que x representa una coordenada y , en este caso, entenderse que la solución de esta ecuación son los puntos que tienen coordenada x con valor de 1 ; pero aun en esta situación habría que especificar el contexto geométrico y el sistema de referencia involucrado. Si estamos hablando del eje x , hay un único punto que satisface la ecuación $x = 1$; en este contexto, la gráfica de la ecuación $x = 1$ podría dibujarse así:



En el plano xy (un sistema bidimensional a diferencia del eje x que es un sistema de una dimensión o unidimensional), los puntos que cumplen o satisfacen la ecuación $x = 1$ forman una recta paralela al eje y que pasa precisamente por el punto con coordenada $x = 1$ en el eje x . La gráfica de la ecuación $x = 1$ es:



Finalmente, si consideramos el espacio tridimensional, los puntos que satisfacen la ecuación $x = 1$ forman un plano paralelo al plano yz que pasa o atraviesa el plano xy precisamente en la recta con ecuación $x = 1$. En este contexto, la gráfica de la ecuación $x = 1$ es el plano infinito del que se muestra una porción sombreada en la siguiente figura:

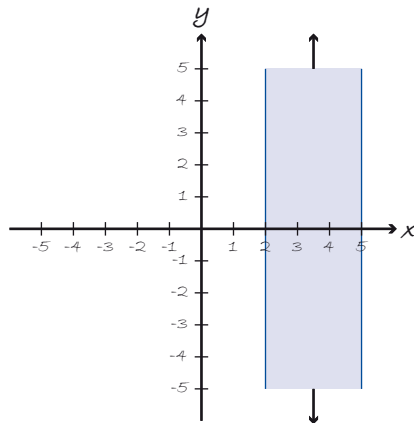


Observemos que el punto con ecuación $x = 1$ está contenido en la recta en el plano xy con la misma ecuación y , a su vez, la recta está contenida en el plano de igual ecuación. Hemos respondido así al punto 1 de la SP-2.

Consideremos ahora la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ en relación con el punto 2 de la SP-2. Si tomamos en cuenta solamente el eje x , los puntos que satisfacen esta desigualdad forman un intervalo cerrado (o que incluye sus extremos) que se representa así: $[2, 5]$. La gráfica de la desigualdad puede verse como sigue:

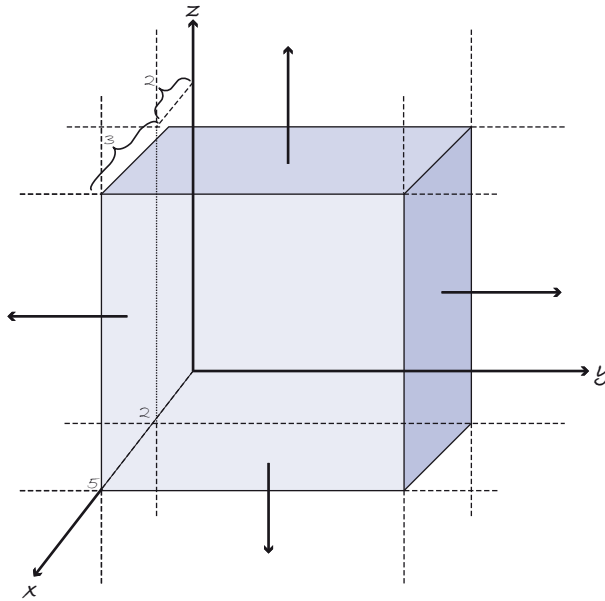


En el plano xy la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ la cumplen todos los puntos que forman una franja vertical limitada por las rectas $x = 2$ y $x = 5$. De hecho, esta franja puede verse como la unión de todas las rectas verticales correspondientes a cada uno de los valores de x comprendidos entre 2 y 5, inclusive éstos. Podemos dibujar, en este contexto, la gráfica de $2 \leq x \leq 5$ como se muestra en la siguiente figura:



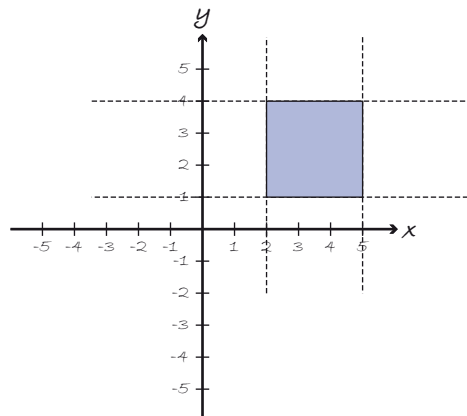
Finalmente, si nos ubicamos en el espacio tridimensional y recordamos que todos los puntos con el mismo valor de la coordenada x forman un plano, entonces el conjunto

de puntos que satisfacen la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ puede verse como la colección de todos los planos paralelos al de yz , correspondientes a cada valor de x en el intervalo $[2, 5]$. Podemos decir que la gráfica de $2 \leq x \leq 5$ en el espacio tridimensional es una placa infinita de espesor 3 y paralela al plano yz , que pretende ser representada en la siguiente figura:

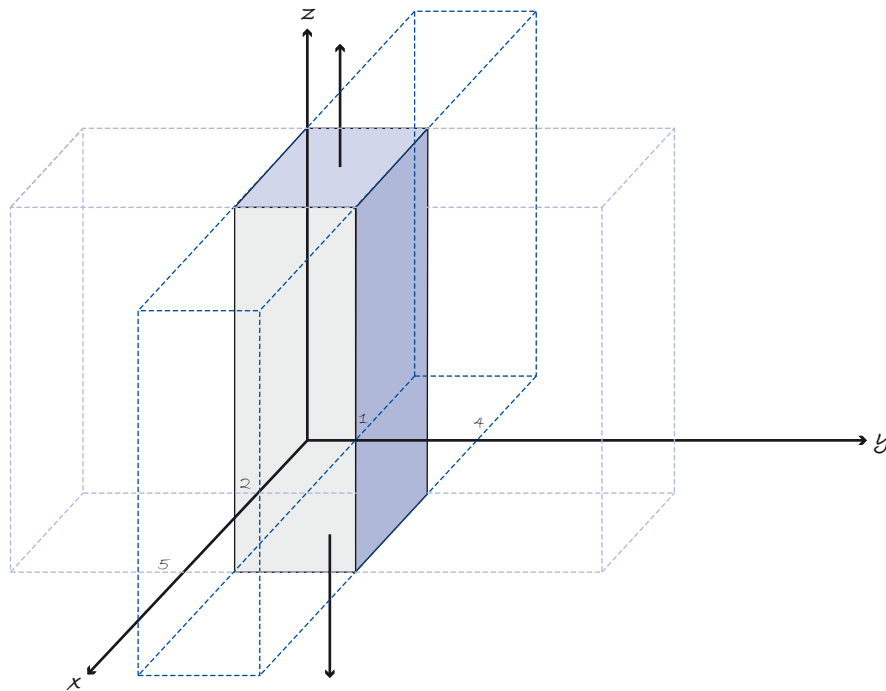


Observemos que el intervalo correspondiente a la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ está contenido en la franja en el plano xy representado por la misma desigualdad y, a su vez, esta franja está contenida en la placa de espesor 3 correspondiente a dicha desigualdad. Hemos respondido así al punto 2 de la SP-2.

Si ahora, en el inciso 3 de la SP-2, consideramos los puntos del plano xy que satisfacen *simultáneamente* las desigualdades $2 \leq x \leq 5$ y $1 \leq y \leq 4$, podemos afirmar que éstos forman un rectángulo (incluyendo las orillas y el interior) que es precisamente la intersección de las franjas en el plano xy correspondientes a cada desigualdad por separado. Presentamos enseguida la gráfica en el plano xy de este sistema de dos desigualdades.

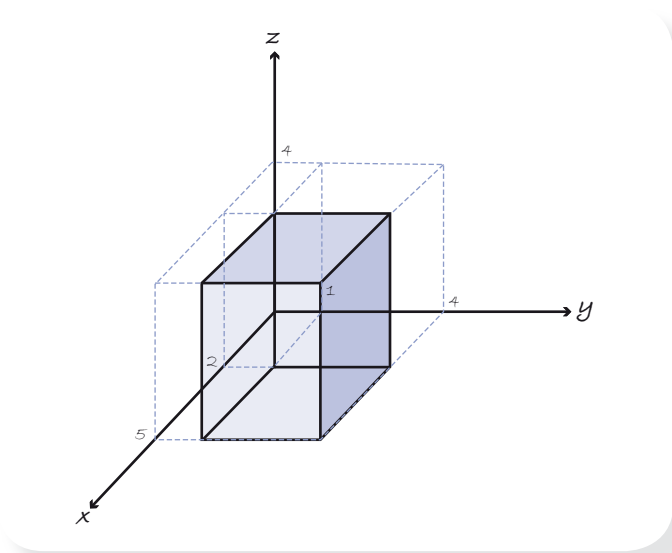


Nos preguntamos ahora por el conjunto de puntos en el espacio tridimensional que satisface el mismo sistema de dos desigualdades. Una manera de visualizar este conjunto es razonando así: si un punto del espacio con coordenadas (x, y, z) satisface simultáneamente las desigualdades $2 \leq x \leq 5$ y $1 \leq y \leq 4$, debe, por lo pronto, pertenecer a un rectángulo como el que se menciona en el párrafo anterior, sólo que éste debe estar a la altura que indique precisamente el valor de la coordenada z del punto. Tomando cada punto del rectángulo (la gráfica de $2 \leq x \leq 5$ y $1 \leq y \leq 4$ en el plano xy) y “desplazándolo” verticalmente hacia arriba y hacia abajo, formamos rectas verticales infinitas cuyos puntos satisfacen las dos desigualdades. Luego, todos los puntos del espacio tridimensional que cumplen el sistema de desigualdades dado conforman la unión de todas estas rectas. Presentamos enseguida su gráfica:



Observemos que la figura obtenida puede verse como una columna que es la intersección de dos placas de espesor 3, una paralela al plano yz y que corresponde a la desigualdad $2 \leq x \leq 5$, y la otra paralela al plano xz y que corresponde a la desigualdad $1 \leq y \leq 4$.

En relación con el punto 4 de la SP-2, donde se pide identificar en el espacio tridimensional todos los puntos que satisfacen *simultáneamente* las tres desigualdades $2 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4$, diremos que estos puntos deben pertenecer a la figura del punto anterior, en tanto que deben cumplir las primeras dos desigualdades. Sin embargo, cumplir la tercera obliga a limitar las alturas de 0 a 4; esto nos conduce a afirmar que el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las tres desigualdades forman una caja (incluyendo todos los lados y el interior) como la que dibujamos enseguida.

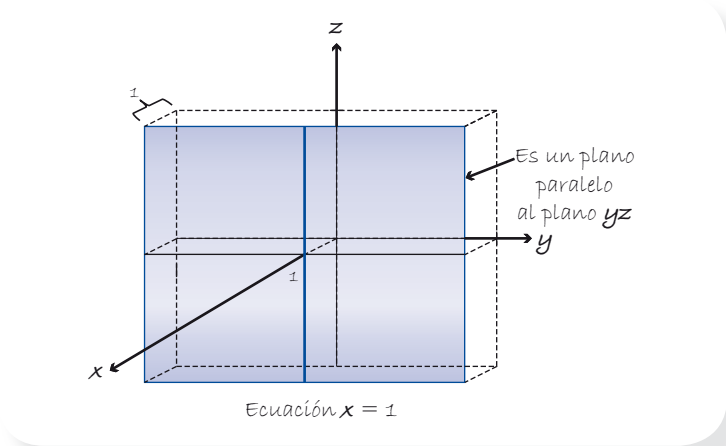


Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 2

1. Coordenadas esféricas y cilíndricas

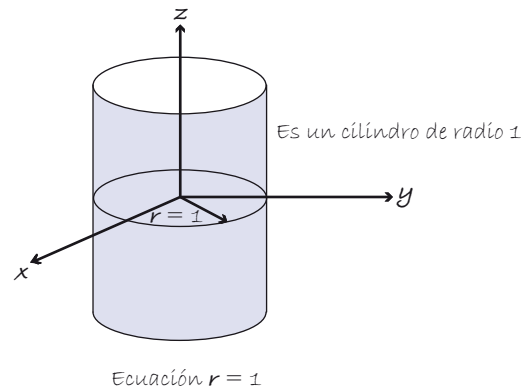
Ya hemos mencionado que existen diversas formas para ubicar las posiciones de los puntos en el espacio según los sistemas de referencia que sean utilizados. Si la posición está dada por las distancias a tres planos perpendiculares entre sí, estamos hablando de las **coordenadas cartesianas** o **rectangulares**. En este tipo de coordenadas las posiciones de los puntos se representan con una terna de números (x, y, z) formada por las distancias a los planos de referencia escogidos. Si elegimos ahora O , como de el punto referencia y nos fijamos en la distancia, denotada por ρ , de los puntos del espacio a este punto, tenemos una de las coordenadas del sistema de **coordenadas esféricas**. Si se consideran las posiciones de los puntos respecto a una recta fija (la llamaremos eje z), la distancia, denotada por r , de un punto a esa recta es una de las llamadas **coordenadas cilíndricas**.

Podemos formar ahora ecuaciones y desigualdades en términos de las nuevas coordenadas y estudiar sus gráficas, así como lo hemos hecho con las coordenadas cartesianas. Ya sabemos que la gráfica de la ecuación $x = 1$, en el espacio tridimensional, es un plano paralelo al yz que pasa por el punto 1 del eje x .

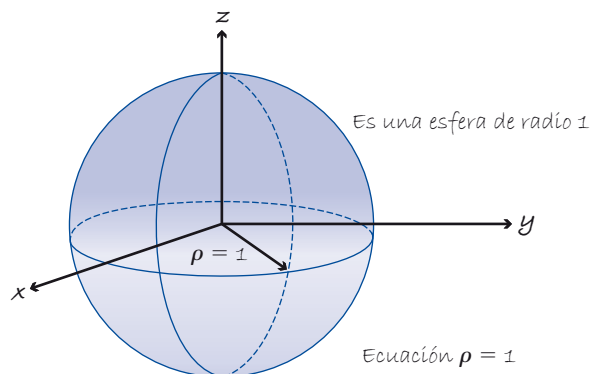


¿Cuál es la gráfica de la ecuación $r = 1$ y cuál la de $\rho = 1$?

Los puntos del espacio que cumplen la ecuación $r = 1$ son aquellos que están a una distancia 1 del eje z . La gráfica de esta ecuación es una corteza cilíndrica infinita de radio 1 cuyo eje central es el eje z .



Los puntos del espacio que cumplen la ecuación $\rho = 1$ son aquellos cuya distancia al origen, O , es exactamente 1, y forman un cascarón esférico de radio 1 y centro en O (el origen).



Notemos que un punto en el espacio no queda determinado completamente especificando el valor de la coordenada cilíndrica r ; otras coordenadas tendrán que ser consideradas junto con r para formar lo que se llama **sistema de coordenadas cilíndricas**. De igual forma, un valor de la coordenada esférica ρ no determina un punto específico en el espacio (en todo caso una superficie esférica); más adelante estudiaremos las otras dos coordenadas que junto con ρ forman lo que se llama **sistema de coordenadas esféricas**.

La elección de las coordenadas a usar depende de la forma de las figuras que aparezcan en los problemas que se consideren. Tendremos ocasión de utilizar estos tipos de coordenadas cuando estudiemos algunos aspectos del fenómeno de la electricidad y el magnetismo, por ejemplo.

1. Formula un sistema de coordenadas cartesianas en tu salón de clases:
 - a) Elige una de las ventanas del salón y establece las condiciones (igualdades o desigualdades) que satisfacen simultáneamente las coordenadas de los puntos de la ventana.
 - b) Coloca una hoja de papel, de tal forma que esté paralela al piso, y establece las condiciones (igualdades o desigualdades) que satisfacen simultáneamente las coordenadas de los puntos de la hoja.
 - c) Establece las condiciones (igualdades o desigualdades) que satisfacen simultáneamente las coordenadas de los puntos del pizarrón.

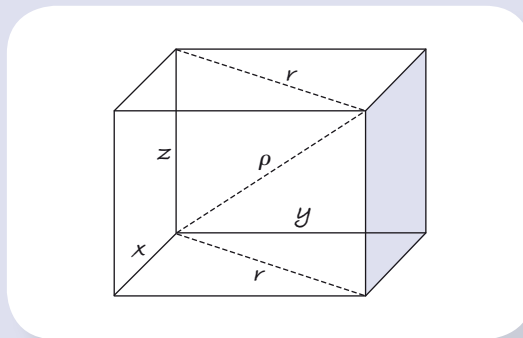
2. Determina la ecuación de cada plano:
 - a) Plano xy
 - b) Plano xz
 - c) Plano yz
 - d) Plano paralelo al plano xy , dos unidades arriba de él
 - e) Plano paralelo al plano xz , 10 unidades a la izquierda de él
 - f) Plano paralelo al plano yz , cuatro unidades adelante de él

3. Identifica todos los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas cartesianas cumplen (todas) las condiciones establecidas en cada inciso. Haz un dibujo en el espacio de la región que forman estos puntos o describe cada región con tus propias palabras.
 - a) $y = 5$
 - b) $x \leq -2$
 - c) $z \geq 3$
 - d) $x = 1$ y $y = 2$
 - f) $x = 1$ y $z = 3$
 - g) $y = 2$ y $z = 3$
 - h) $1 \leq z \leq 5$
 - i) $4 \leq y \leq 9$
 - j) $1 \leq z \leq 5$ y $4 \leq y \leq 9$
 - k) $0 \leq x \leq 3$, $1 \leq z \leq 5$ y $4 \leq y \leq 9$

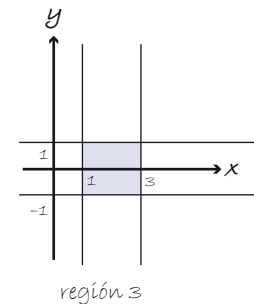
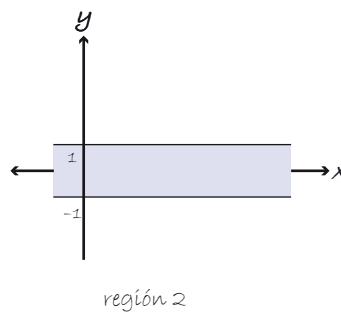
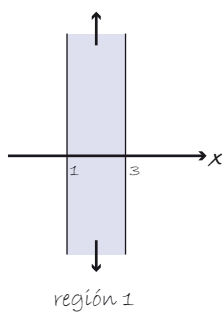
4. Identifica todos los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas cartesianas x , y y z , cilíndrica r , y esférica ρ , cumplen las condiciones establecidas en cada inciso. Haz un dibujo en el espacio de la región que forman estos puntos o describe cada región con tus propias palabras.
 - a) $r = 4$
 - b) $\rho = 6$
 - c) $r = 4$ y $z = 10$
 - d) $r = 4$ y $z = -1$
 - e) $r = 4$ y $x = 0$

- f) $r=4$ y $x=4$
- g) $r=4$ y $y=0$
- h) $r=4$ y $y=-4$
- i) $\rho=6$ y $z=4$
- j) $\rho=6$ y $z=6$
- k) $r=4$ y $\rho=6$
- l) $0 \leq \rho \leq 1$
- m) $3 \leq \rho \leq 4$
- n) $3 \leq r \leq 4$

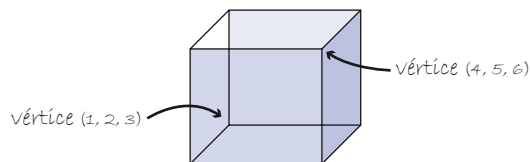
En los problemas 5, 6 y 7 toma en cuenta la siguiente figura para obtener las fórmulas que se solicitan.



5. Obtén una fórmula para la coordenada ρ en términos de las coordenadas x , y y z . Determina el valor de z si $x=2$, $y=3$ y $\rho=7$.
6. Obtén una fórmula para la coordenada r en términos de las coordenadas x y y . Determina el valor de x si $y=3$ y $r=5$.
7. Obtén una fórmula para la coordenada ρ en términos de las coordenadas r y z . Determina el valor de r si $z=4$ y $\rho=6$.
8. Describe matemáticamente cada región sombreada del plano.

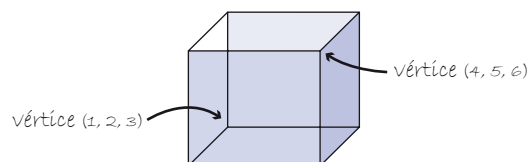


9. En la caja que se muestra en la figura se indican las coordenadas cartesianas de dos de sus vértices. Determina las coordenadas cartesianas de los seis vértices restantes.

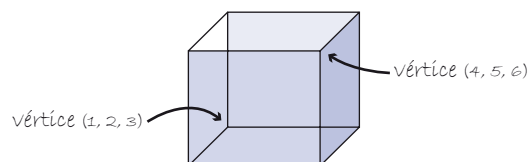


10. Determina el grupo de ecuaciones o desigualdades que describe matemáticamente a tres de las caras de la caja mostrada en la figura y que se indican en los siguientes incisos:

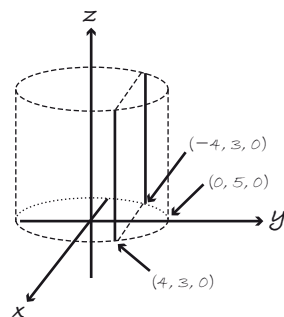
- a) cara superior
- b) cara derecha
- c) cara frontal



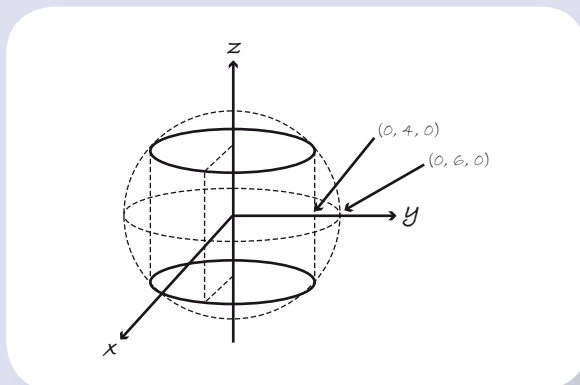
11. Determina el grupo de desigualdades que describe matemáticamente a la región del espacio ocupada por la caja sólida mostrada en la figura.



12. Determina el par de igualdades que satisfacen simultáneamente las coordenadas (cartesiana y cilíndrica) de los puntos de las dos rectas trazadas con línea continua en la siguiente figura.



13. Determina el par de igualdades que satisfacen simultáneamente las coordenadas (cilíndrica y esférica) de los puntos de las dos circunferencias trazadas con línea continua en la siguiente figura.



1.2

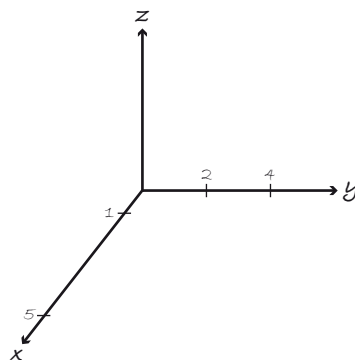
Flujo y funciones de dos variables

El **flujo** es una de las dos nociones motoras cuyo estudio provoca en este libro el surgimiento de conceptos, procesos y resultados del Cálculo (la otra noción motora es el trabajo o circulación). El flujo puede ser considerado la razón a la que atraviesa un fluido una superficie imaginaria respecto al tiempo; se puede representar geoméricamente como el volumen de un sólido, conduce al establecimiento de la integral de superficie cuando nos enfrentamos al problema de realizar su cálculo y es indispensable al enunciar la ley de Gauss de la electricidad. En este tema utilizaremos la noción de flujo como un medio para construir el concepto de función de dos variables y visualizar una superficie como su representación gráfica. Así, al mismo tiempo que hacemos surgir un nuevo concepto, nos vamos familiarizando con una de las nociones más importantes de la Física. Empecemos con la siguiente situación-problema.

Situación-Problema 3 (SP-3)

Imaginemos una compuerta en el piso del salón de clases y que por cada punto de ella fluye agua al interior del salón en forma perpendicular al piso y con rapidez constante de 3 m/s. Los puntos de la compuerta satisfacen las desigualdades: $1 \leq x \leq 5$ y $2 \leq y \leq 4$.

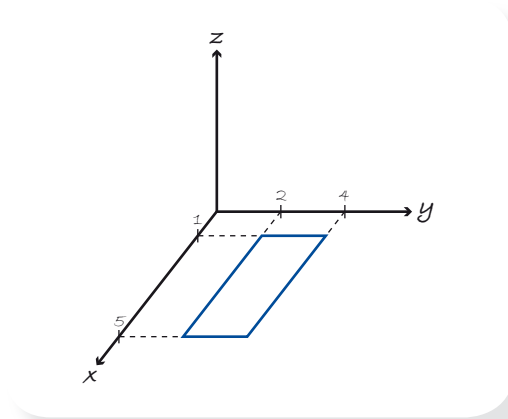
1. En la figura siguiente dibuja la compuerta.
2. En cada una de las esquinas de la compuerta dibuja un vector que represente la velocidad del agua de acuerdo con las características descritas al principio de la situación-problema. Este vector se llama **vector velocidad**.
3. Si colocáramos el vector velocidad en todos los puntos de la compuerta, ¿qué figura se formaría?



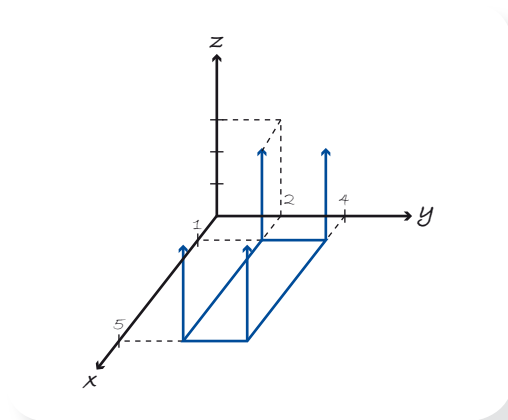
- ¿Qué volumen de agua fluye por segundo a través de la compuerta?
- ¿Qué relación tiene este volumen con el de la figura del punto 3?
- Calcula el volumen de agua que fluye a través de la compuerta durante 5 segundos.
- ¿Qué tipo de figura te imaginas que tenga el mismo volumen que el calculado en el punto anterior?

Discusión de la Situación-Problema 3

El dibujo de la compuerta se muestra a continuación.



Como el agua fluye de manera perpendicular al piso (donde está la compuerta), el vector que se pide dibujar en cada esquina de la compuerta (que será idéntico para cualquier otro punto de ella, ya que el comportamiento del agua es el mismo para todos los puntos) debe ser perpendicular al plano xy (donde está el piso y la compuerta) y, por lo tanto, lleva la misma inclinación que la recta correspondiente al eje z (porque ésta también es perpendicular al plano xy). Decir que el agua fluye al interior del salón hace que el vector que se pide dibujar vaya en dirección del eje z positivo. Finalmente, el hecho de que la rapidez del agua sea de 3m/s hace que los vectores que se pidan sean de magnitud 3. Tenemos así la siguiente figura que contiene los cuatro vectores velocidad en las esquinas de la compuerta.



Si colocáramos en cada punto de la compuerta el vector velocidad correspondiente, tendríamos una caja rectangular rellena. La altura de esta caja correspondería a la magnitud del vector velocidad, y su base es la compuerta.

La cantidad de agua que fluye hacia el interior del salón en un segundo a través de la compuerta equivale al volumen de la caja que se menciona en el párrafo anterior. Este volumen es de 24 m^3 (donde las distancias en x y en y se miden en metros). Al ser constante el ritmo con el que el agua fluye hacia el interior del salón, $24 \text{ m}^3/\text{s}$, en 5 segundos el volumen de agua que fluye a través de la compuerta es de 120 m^3 . Este volumen corresponde al de una caja de altura de 15 m (la distancia recorrida por cada partícula de agua, imaginándolas viajando en línea recta a $3 \text{ m}^3/\text{s}$) con una base de 8 m^2 .

Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 3

1. Vectores unitarios \vec{i} , \vec{j} , y \vec{k}

El vector velocidad de la SP-3 se representa matemáticamente como $\vec{v} = 3\vec{k}$, donde \vec{k} es un vector unitario (de magnitud 1) perpendicular al plano xy y en dirección del eje z positivo. El vector \vec{k} junto con los vectores \vec{i} (unitario y en dirección del eje x positivo) y \vec{j} (unitario y en dirección del eje y positivo) forman una base, en el sentido de que cualquier vector (en coordenadas cartesianas) puede expresarse como una combinación lineal de éstos.

2. Flujo

Es necesario señalar que cuando en la SP-3 se dice al principio "...el agua fluye al interior del salón...", se está haciendo explícita una dirección del fluido. Es conveniente identificar como **flujo** a la cantidad de agua que atraviesa la compuerta (en este caso) por unidad de tiempo, en una **dirección** dada; si el fluido se mueve en la misma dirección que la dirección dada, el flujo será positivo, si la dirección es opuesta, se tendrá un flujo negativo. En la SP-3 podemos decir que el flujo de agua (en dirección hacia el interior del salón) es de $24 \text{ m}^3/\text{s}$: (positivo, ya que el agua va en esa misma dirección).

Podemos establecer la siguiente fórmula para calcular el flujo cuando la velocidad del fluido es constante y atraviesa perpendicularmente una superficie plana, como es el caso de la SP-3:

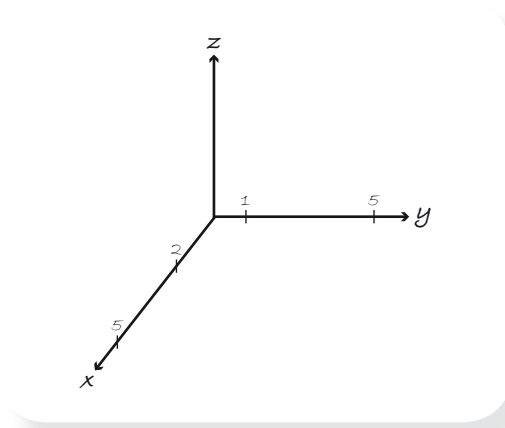
$$\text{flujo} = \pm (\text{magnitud de la velocidad}) \times (\text{área de la superficie})$$

3. Campo vectorial

Cuando a cada punto del espacio se le asocia un vector se dice que se tiene un campo vectorial (si estos vectores representan, a su vez, velocidades de un fluido, se tiene un campo de velocidades). Los campos vectoriales pueden ayudarnos a estudiar el comportamiento de un fluido. En la SP-3 hemos considerado un campo de velocidades constante y definido solamente en los puntos de un rectángulo en el plano xy . En general, un vector puede variar de punto en punto en el espacio; para indicar un vector correspondiente a un punto en el espacio con coordenadas (x, y, z) utilizamos la notación: $\vec{v}(x, y, z)$. Si escribimos, por ejemplo, $\vec{v}(x, y, z) = x^2 y \vec{i} + xz \vec{j} + y^2 z \vec{k}$ estamos dando una fórmula para asignar vectores a puntos específicos del espacio (de hecho, estamos frente a lo que se llama función vectorial). Si consideramos el punto del espacio con coordenadas $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ tenemos que, de acuerdo con la fórmula dada, $\vec{v}(1, 2, 0) = 2\vec{i}$.

Situación-Problema 4 (SP-4)

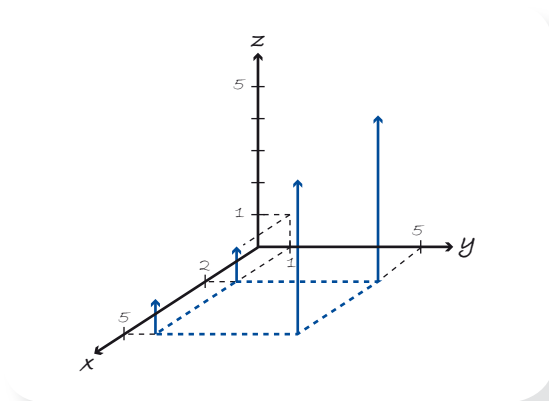
Consideremos la compuerta descrita por las siguientes expresiones: $2 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 5$ y $z = 0$, y de nueva cuenta supongamos que el agua fluye a través de la compuerta, pero ahora con una velocidad dada por la fórmula $\vec{v}(x, y) = y\vec{k}$.



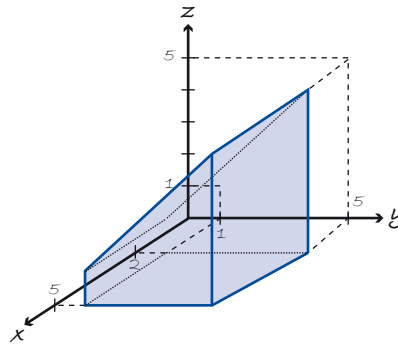
1. ¿Fluye el agua con la misma velocidad en cada punto de la compuerta?
2. Dibuja en la figura de arriba la compuerta y los vectores de velocidad correspondientes a las esquinas.
3. Dibuja la figura que se formaría si colocáramos los vectores de velocidad correspondientes a todos los puntos de la compuerta.
4. Calcula el volumen de la figura del inciso 3.
5. ¿Cuál es el flujo de agua a través de la compuerta en dirección del eje z positivo (o al interior del salón)? ¿Qué relación tiene el flujo con el volumen de la figura del inciso 3?
6. ¿Qué tipo de figura se forma si consideramos sólo las puntas de todos los vectores de velocidad sobre la compuerta?

Discusión de la Situación-Problema 4

Observemos que la velocidad del agua depende de la coordenada y del punto de la compuerta y que, por supuesto, no depende de las otras dos coordenadas. Esto hace que en los puntos que tengan la misma y , la velocidad sea igual, no importa cuáles sean x o z . Definitivamente el agua no fluye con velocidad idéntica en cada punto de la compuerta, porque hay puntos de ella con diferente coordenada y . La siguiente figura muestra los vectores correspondientes a las cuatro esquinas de la compuerta.



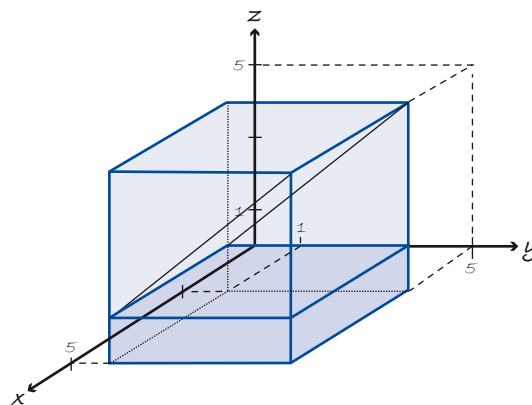
Si colocáramos los vectores de velocidad correspondientes a todos los puntos de la compuerta tendríamos una especie de caja, como muestra la siguiente figura.



Observemos que las caras izquierda y derecha son rectángulos de altura 1 y 5, respectivamente, ya que en la orilla izquierda de la compuerta todos los puntos tienen coordenada y igual a 1, mientras que en la orilla derecha esta coordenada es 5. Tanto en la orilla de atrás como en la de enfrente, las alturas varían (uniformemente) de 1 a 5 en relación con el cambio en y , avanzando de izquierda a derecha; de hecho, en cada línea de la compuerta paralela a la de enfrente (o la de atrás) las alturas llevan el mismo comportamiento que en estas orillas, esto es porque las alturas no dependen de x . Observemos además que para líneas de la compuerta paralelas a la orilla derecha (o izquierda) las alturas permanecen constantes porque el valor de la coordenada y no cambia.

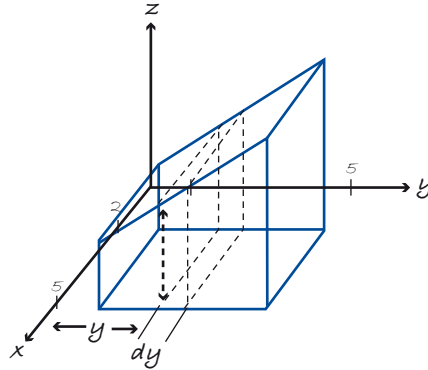
El volumen de esta figura puede calcularse de diferentes maneras, por ejemplo:

- a) Se completa una caja de altura 5 y se observa que la figura original tiene en su parte inferior una caja de altura 1; se puede realizar entonces la siguiente operación: al volumen de la caja mayor (CM) se le resta el volumen de la caja menor (Cm), la diferencia se divide entre dos y se agrega el volumen de la caja menor.



El resultado que se obtiene es $v = \frac{CM - Cm}{2} + Cm = \frac{60 - 12}{2} + 12 = 36 \text{ (m}^3 \text{ o cm}^3\text{)}$ según las unidades con las que se trabajen).

- b) Podemos calcular el área de la cara frontal (o la de atrás, que vale lo mismo) y multiplicar por el fondo. Haz los cálculos y verifica que se obtiene el mismo resultado que en el inciso a). ¿Se obtendría el mismo resultado si tomáramos el área de la cara izquierda o la derecha y multiplicáramos por el fondo?
- c) Si cortamos la caja con un plano paralelo al xz para algún valor de y entre 1 y 5 (ve la figura) la región del corte es un rectángulo con base 3 y altura y , por lo tanto, su área es $A(y) = 3y$ (dependiendo del valor que tome y). Si multiplicamos esta área por dy formamos un diferencial de volumen de la caja (una “rebanada” de anchura infinitesimal) $dV = A(y)dy = 3ydy$:



Al sumar todos estos diferenciales de volumen desde $y = 1$ hasta $y = 5$ se tiene de nuevo el volumen de la caja; es decir, el volumen es la siguiente integral:

$$V = \int_{y=1}^{y=5} 3y dy$$

Integrando y evaluando tenemos que $V = \left[\frac{3}{2} y^2 \right]_{y=1}^{y=5} = \frac{75}{2} - \frac{3}{2} = 36$.

En relación con el punto 5 de la SP-4 podemos afirmar que el flujo del agua a través de la compuerta y en dirección del eje z positivo (hacia arriba o al interior del salón) es igual al volumen de la caja que hemos calculado. Un argumento a favor de esta afirmación es el siguiente: fijemos un tiempo e imaginemos todas las gotas de agua que están (en su flujo) exactamente en la compuerta (llamémoslas *primeras gotas*) en ese tiempo. Después de un segundo, cada una de ellas recorrerá una distancia igual a la magnitud de su velocidad (suponiendo que la velocidad en cada punto es constante en el tiempo, aunque de punto a punto puede cambiar según la fórmula del campo de velocidades).

Podemos entonces concluir que por cada punto de la compuerta, el agua que fluye durante el segundo dado podría formar una columna encabezada por la primera gota, de altura igual a la magnitud de la velocidad correspondiente al punto de ubicación de esa gota. Todas las columnas de agua pueden visualizarse como los vectores velocidad colocados en los puntos de la compuerta. Así que el espacio que llenan todos los vectores es el mismo que llenan todas las columnas de agua. Dado que el flujo es la cantidad de agua que atraviesa la compuerta (en la dirección dicha) en una unidad de tiempo, este flujo coincide con el volumen de la caja.

Por supuesto que existe una gran diferencia entre las magnitudes de flujo y volumen: la segunda siempre es positiva, mientras que la primera puede también ser negativa como ya habíamos visto.

Respecto al último punto de la SP-4, donde se nos pregunta por la figura que se formaría si consideramos sólo las puntas de todos los vectores velocidad, podemos servirnos de nueva cuenta de la imagen de las (primeras) gotas de agua que en un momento dado están exactamente en la compuerta; al fluir durante un segundo, podemos imaginarlas ocupando las puntas de las flechas o vectores velocidad. De esta manera, la figura que se forma considerando sólo las puntas de los vectores velocidad puede visualizarse como una película (formada por gotas de agua), capa o superficie que corresponde a la cubierta superior de la caja que habíamos dibujado cuando consideramos a la vez todos los vectores velocidad.

Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 4

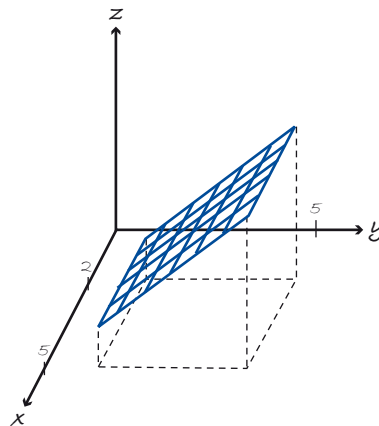
1. Función de dos variables, $z = f(x, y)$

El campo de velocidades considerado en la SP-4, $\vec{v}(x, y) = y\vec{k}$, es un caso particular del campo $\vec{v}(x, y) = f(x, y)\vec{k}$; donde $f(x, y)$ representa un número (variable) asociado con el punto del plano xy con coordenadas (x, y) . En el caso particular de $\vec{v}(x, y) = y\vec{k}$ tenemos que $f(x, y) = y$.

En general, el vector dado por la fórmula $\vec{v}(x, y) = f(x, y)\vec{k}$ es perpendicular al plano xy (esto es debido a la presencia del vector \vec{k}); va hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo que adquiera $f(x, y)$ (de acuerdo precisamente con los valores que se elijan de x y de y). La magnitud de $\vec{v}(x, y) = f(x, y)\vec{k}$ es el valor absoluto del número $f(x, y)$.

Escribimos la expresión $z = f(x, y)$ para hablar de una **función de dos variables**. Los valores de z dependen, o están en función, de los valores de x y de y . Más precisamente: cualesquier dos valores precisos de x y de y determinan un único valor de z .

La totalidad de puntos en el espacio con coordenadas (x, y, z) , donde $z = f(x, y)$, forman una superficie que corresponde a la gráfica de la función $z = f(x, y)$. En el caso particular de la SP-4, donde $f(x, y) = z$, la gráfica de la función $z = f(x, y) = y$, o simplemente de la ecuación $z = y$, es un plano, del que se ha dibujado la parte correspondiente a los valores de x y de y de la compuerta.



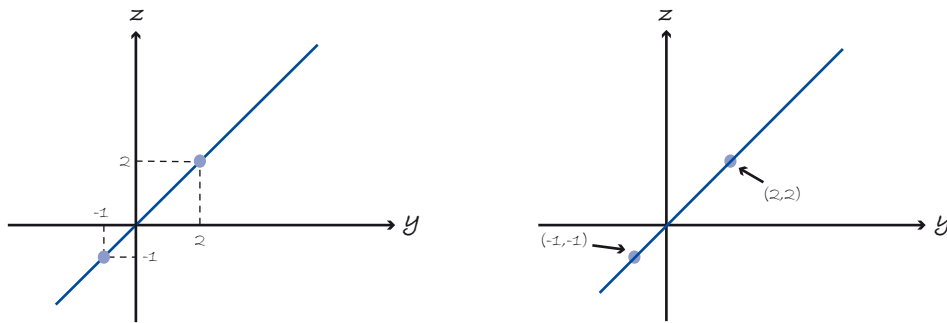
Gráfica de $z = f(x, y) = y$ sobre la compuerta de la SP-4

2. Gráfica de una función de dos variables, $z = f(x, y)$

Con la idea de ir perfilando una manera de visualizar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en general y que abordaremos con mayor amplitud en el Tema 4 de esta unidad, conviene hacer una serie de reflexiones sobre la gráfica de la función $z = f(x, y) = y$.

Tomemos la ecuación $z = y$. Para identificar su gráfica es necesario reconocerla como una colección de parejas del estilo (y, z) o de ternas (x, y, z) . En el primer caso, la gráfica está en el plano yz , mientras que en el segundo la gráfica está en el espacio tridimensional. Las gráficas correspondientes, como veremos, son esencialmente distintas, aunque estrechamente relacionadas. En el primer caso la gráfica es una recta; en el segundo, es un plano. Veamos.

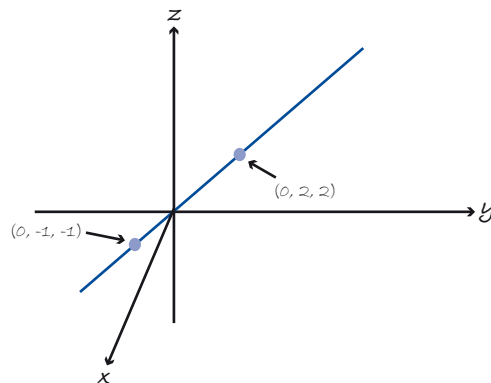
Si nos ubicamos en el plano yz , la gráfica de la ecuación $z = y$, o sea, la colección de parejas (y, z) donde se cumple que $z = y$ forman una recta:



Gráfica de $z = y$ en el plano yz

Si nos ubicamos ahora en el espacio tridimensional, la gráfica de $z = y$ está formada por la colección de ternas (o tripletas) (x, y, z) para las que se cumple que $z = y$.

Agreguemos al plano yz el eje x ; en el plano yz dibujemos la recta anterior.

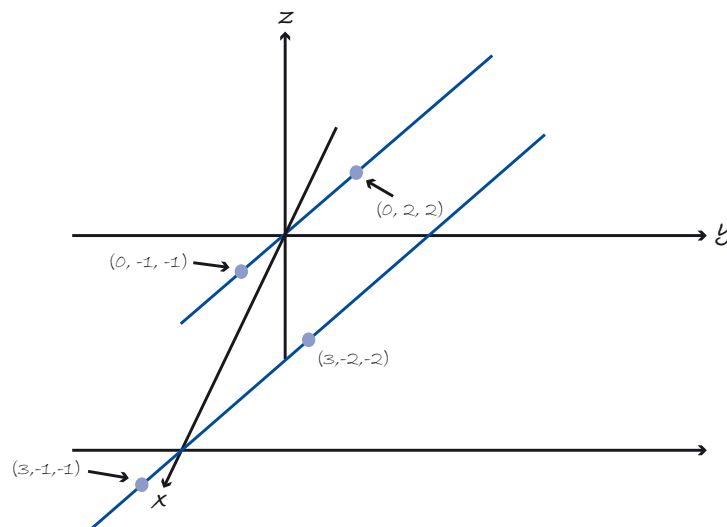


Gráfica de la recta $z = y$ en el plano yz colocado en el espacio tridimensional

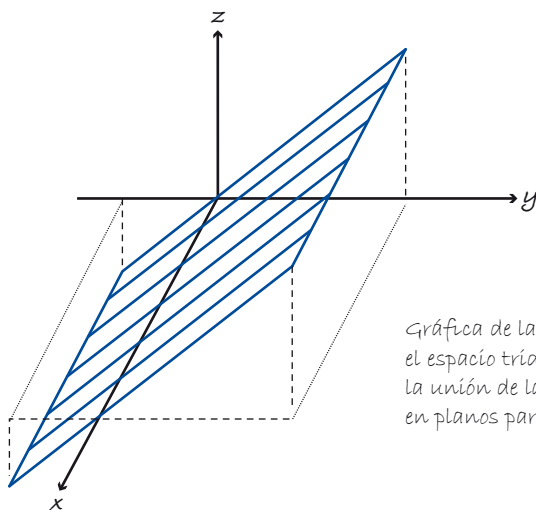
Observemos que los puntos indicados de la recta se representan con tres números, donde el primero, que corresponde a la coordenada x , es 0. Esta recta *no* es la gráfica de la ecuación $z = y$ en el espacio tridimensional, pues aunque los puntos en ella cumplen que $z = y$, no están *todos* los puntos con coordenadas (x, y, z) que cumplen con la ecuación; tomemos como ejemplo los puntos con coordenadas $(1, 2, 2)$ o $(5, 2, 2)$.

Ahora bien, aunque la recta no es la gráfica en el espacio tridimensional, es fundamental para visualizarla. Veamos.

Como se debe cumplir que $z = y$, no importa en realidad el valor de x (la primera coordenada) para asegurar que un punto esté en la gráfica tridimensional, basta que las otras dos coordenadas sean iguales. Así, si tomáramos $z = 3$ y formáramos todas las ternas con esta x y las otras dos coordenadas iguales, los puntos correspondientes forman parte de la gráfica; por ejemplo, los puntos con coordenadas $(3, 2, 2)$, $(3, -1, -1)$ y $(3, 4, 4)$, etc. Todos los puntos con coordenadas $(3, y, y)$, donde la z es igual a la y , forman una recta igual a la de la gráfica anterior sólo que está desplazada al plano con ecuación $x = 3$ que es un plano paralelo al yz (donde están todos los puntos con coordenada x igual a 3). Ambas rectas, las correspondientes a $x = 0$ y $x = 3$ se muestran enseguida.



Si para cada valor x hacemos lo mismo, es decir, en cada plano paralelo al yz colocamos la recta con ecuación $z = y$, la gráfica de la función $z = f(x, y) = y$ o gráfica de la ecuación $z = y$ en el espacio tridimensional puede visualizarse como la superficie formada por la colección de estas rectas (reproducidas para cada valor de x).

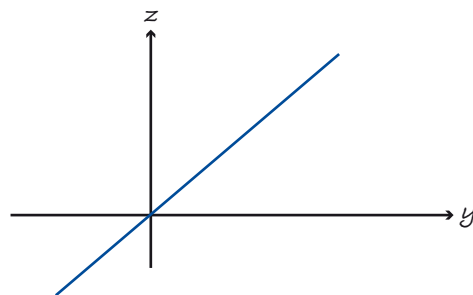


Gráfica de la función $z = f(x, y) = y$ en el espacio tridimensional, visualizada como la unión de las rectas con ecuación $z = y$ en planos paralelos al plano yz .

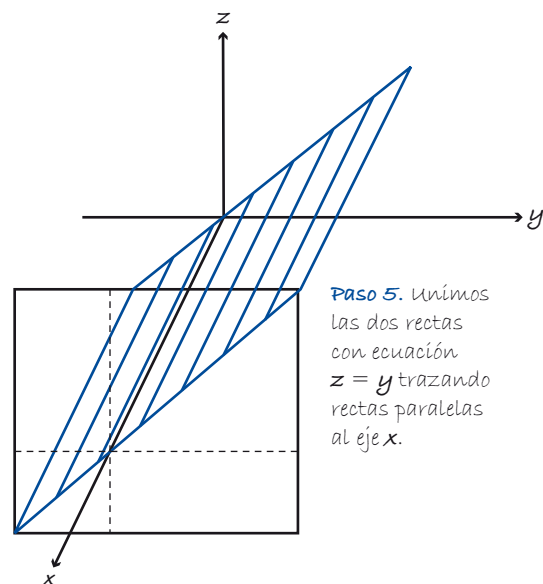
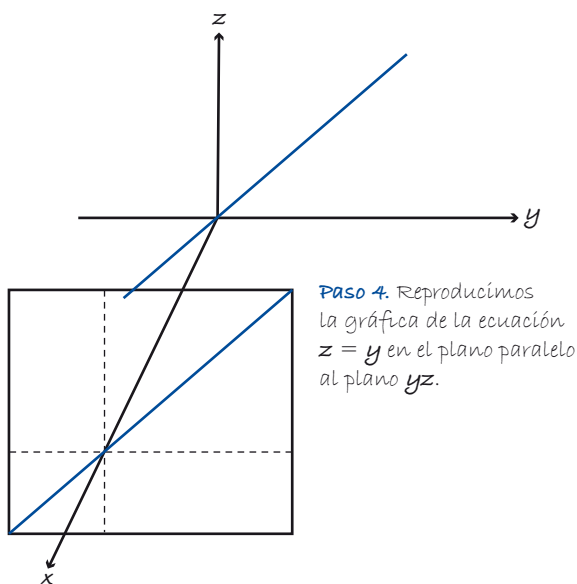
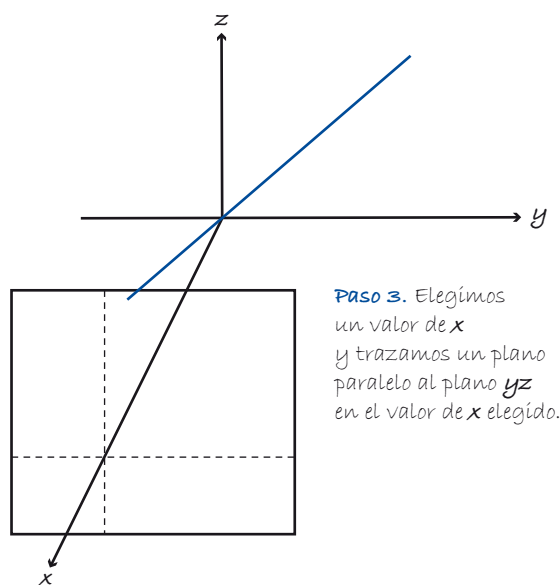
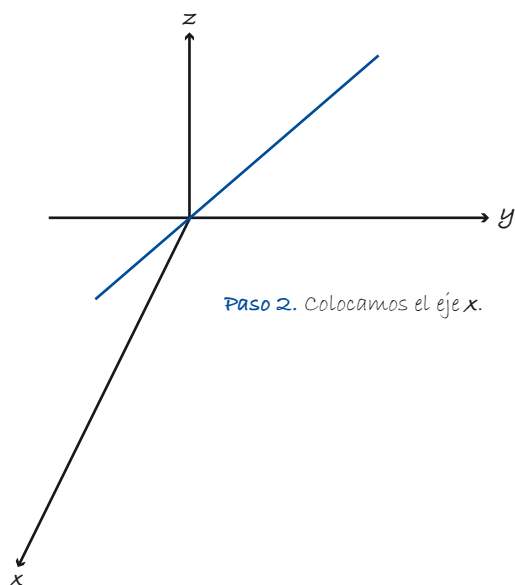
Esta forma de visualizar la gráfica de la función ayuda a delinear una manera práctica de proceder para graficar $z = f(x, y) = y$. Enseguida veremos que este procedimiento se puede aplicar para graficar un tipo de función más amplio: aquel donde z depende de sólo una de las variables x o y :

1. Graficar la ecuación $z = y$ en el plano yz .
2. En un sistema tridimensional, colocar en el plano yz la recta con ecuación $z = y$.
3. Elegir un valor del eje x y colocar ahí un plano paralelo al yz (el origen del plano sería el punto elegido del eje x).
4. Reproducir en el plano del inciso anterior, la recta colocada en el plano yz .
5. Unir con segmentos de recta los puntos correspondientes de las dos rectas dibujadas. Estos segmentos de recta corresponden a fijar un punto en la recta del plano yz y moverlo cambiando sólo el valor de la coordenada x .

Los siguientes dibujos ilustran los pasos anteriores.



Paso 1. Graficamos la ecuación $z = y$ en el plano yz .



La idea que hemos desarrollado para visualizar la gráfica de la ecuación $z = y$ está basada en el hecho de reproducir en cada plano paralelo al yz la misma recta que se dibuja en el plano yz , y esto es posible porque los valores de x no afectan la ecuación (de hecho esa variable no interviene en la ecuación). Se puede entonces inferir que la gráfica de una ecuación con dos variables, al no verse afectada por la tercera, podrá obtenerse siguiendo un patrón similar. Veamos el siguiente ejemplo.

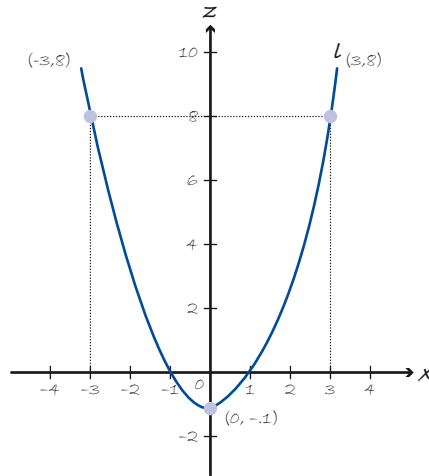
Ejemplo. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función $z = f(x, y) = x^2 - 1$, o de la ecuación $z = x^2 - 1$ (en el espacio tridimensional).

Solución:

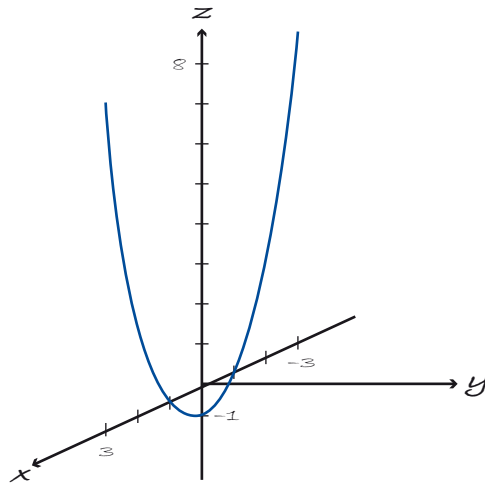
Notemos que en esta función el valor de z depende solamente del valor de x .

Vamos a utilizar, con las adecuaciones necesarias, los pasos de la manera práctica de graficar que ya mencionamos para hacer el bosquejo de la gráfica de la función.

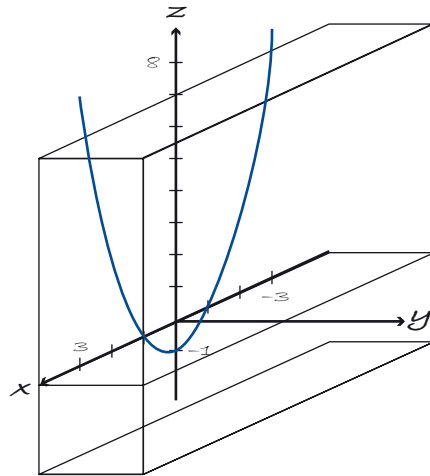
- a) Graficamos la ecuación $z = x^2 - 1$ en el plano xz . La ecuación $z = x^2 - 1$ tiene como gráfica una parábola en el plano xz , la cual se muestra a continuación.



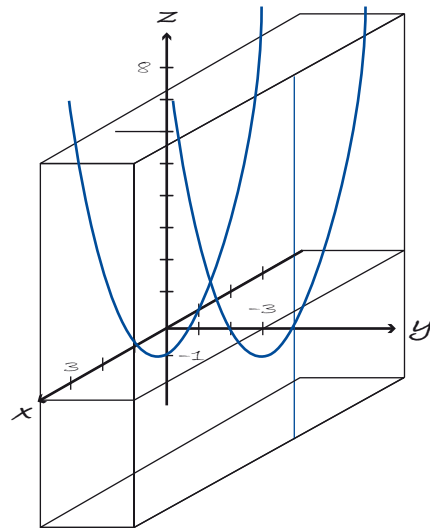
- b) En un sistema tridimensional, colocamos en el plano xz la parábola con ecuación $z = x^2 - 1$.



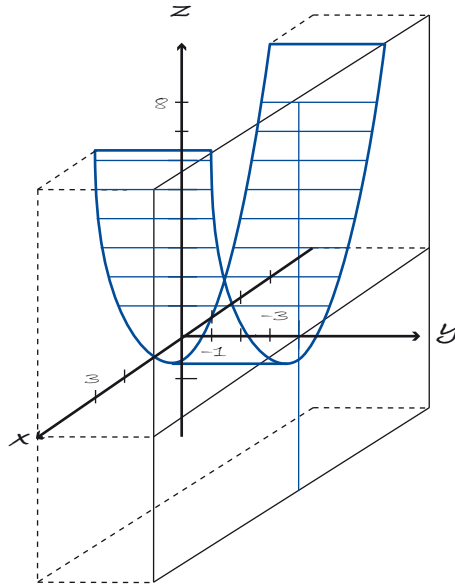
c) Elegimos un valor del eje y y colocamos ahí un plano paralelo al xz .



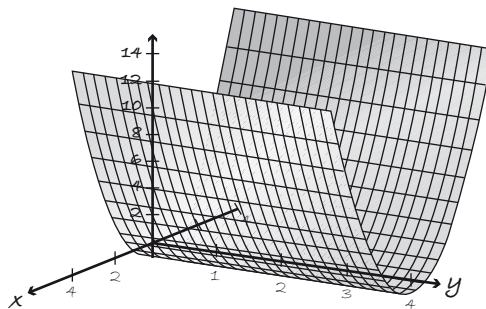
d) Reproducimos en el plano del inciso anterior la parábola del plano xz .



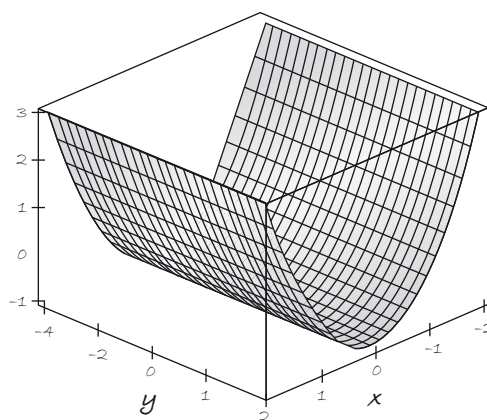
e) Conectamos con segmentos de recta los puntos correspondientes de las dos parábolas dibujadas.



El resultado es una especie de canal (que se extiende al infinito); el siguiente dibujo presenta otro bosquejo de la gráfica de la función $z = f(x, y) = x^2 - 1$ correspondiente al rectángulo $-2 \leq x \leq 2$ y $-4 \leq y \leq 4$ del plano xy .



Una manera de visualizar la parte de la superficie correspondiente a ese rectángulo en el plano xy es “levantar paredes” en los lados del rectángulo (más propiamente sería colocar los planos perpendiculares al plano xy correspondientes a cada lado del rectángulo, limitándolos a la magnitud de los lados respectivos). Se forma así una caja infinita sin tapas; esta caja corta a la superficie en determinadas curvas y encierra una porción de la gráfica de la función. La porción encerrada es la que se nos pide graficar y las curvas que se obtienen al cortar la superficie con la caja son los bordes de la porción encerrada. Observemos la siguiente figura.



3. Flujo vs. volumen

En este punto queremos reforzar la idea de que flujo y volumen son en general cosas distintas, aunque en algunos casos, numéricamente pudieran coincidir, como fue el caso de la SP-4. El volumen siempre es positivo y el flujo puede ser negativo. El flujo está asociado a una dirección, y si se cambia a la dirección contraria, el signo del flujo también cambia.

Consideremos de nuevo que el agua fluye de acuerdo con el campo de velocidades de la SP-4: $\vec{v}(x, y) = y\vec{k}$; pero ahora lo hace a través de la compuerta: $2 \leq x \leq 5$ y $-5 \leq y \leq 5$ del plano xy (en la SP-4 la compuerta es $2 \leq x \leq 5$ y $1 \leq y \leq 5$ del plano xy). Si colocamos vectores en la compuerta, notamos que los correspondientes a la parte negativa del eje y van hacia abajo y se formarían una figura tridimensional como la que se ilustra a continuación.

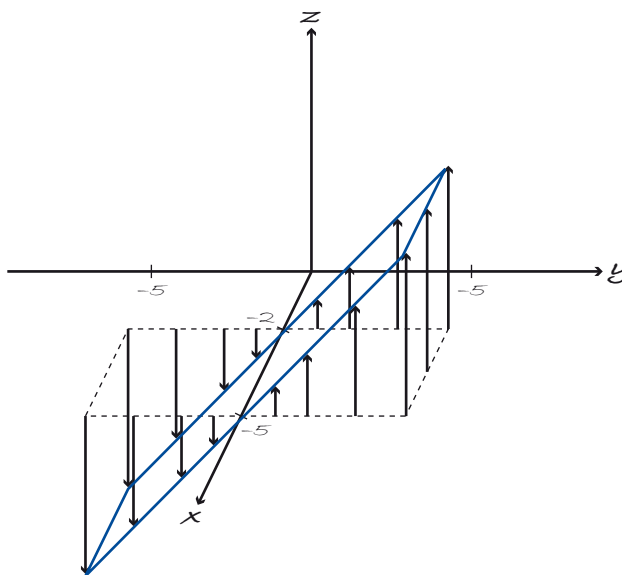


Figura que se forma en el espacio al colocar sobre cada punto de la compuerta, $2 \leq x \leq 5$ y $-5 \leq y \leq 5$, los vectores dados por la ecuación $\vec{v}(x, y) = y\vec{k}$.

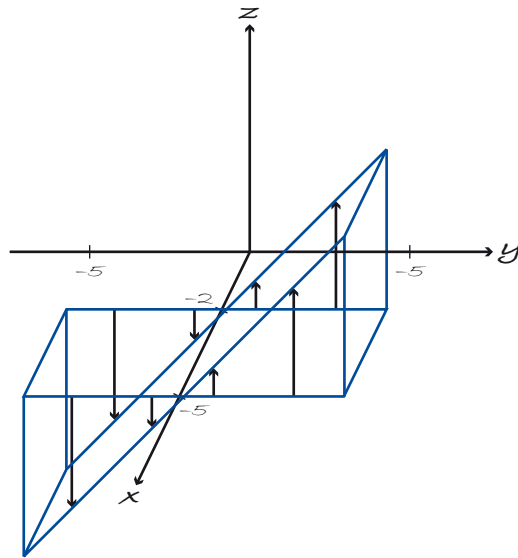
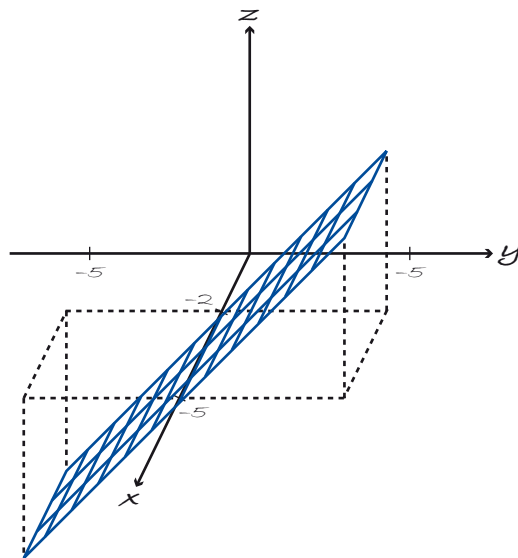


Figura que se forma en el espacio al colocar sobre cada punto de la compuerta, $2 \leq x \leq 5$ y $-5 \leq y \leq 5$, los vectores dados por la ecuación $\vec{v}(x, y) = y\vec{k}$.

Las puntas de las flechas forman una superficie, precisamente la gráfica de la función $z = f(x, y) = y$ limitada al rectángulo $2 \leq x \leq 5$ y $-5 \leq y \leq 5$ del plano xy .



Gráfica de la ecuación $z = f(x, y) = y$ por encima y por debajo de la compuerta, $2 \leq x \leq 5$ y $-5 \leq y \leq 5$.

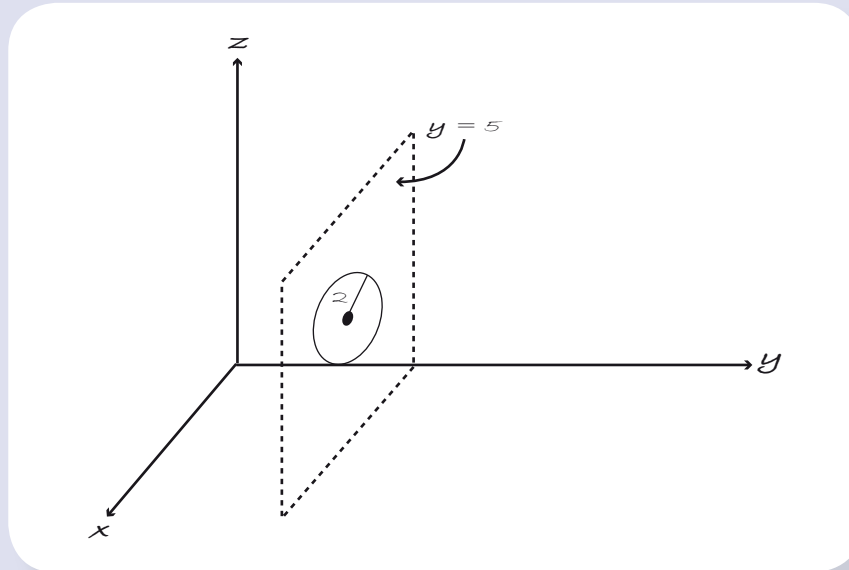
¿Cuál es el volumen de la figura que se forma considerando todos los vectores del campo de velocidades en la compuerta? Esto es, en un contexto puramente geométrico, ¿cuál es el volumen de la región del espacio encerrada por la gráfica de la función, el plano xy y limitada lateralmente por los planos correspondientes a los lados del rectángulo $2 \leq x \leq 5$ y $-5 \leq y \leq 5$ del plano xy ?

Una forma de calcular este volumen es observar que la figura completa tiene dos partes con el mismo volumen: la parte por arriba del plano xy y la parte que está por abajo de este plano. El volumen de la parte de arriba puede calcularse multiplicando el área de la cara de enfrente (el triángulo) por el fondo.

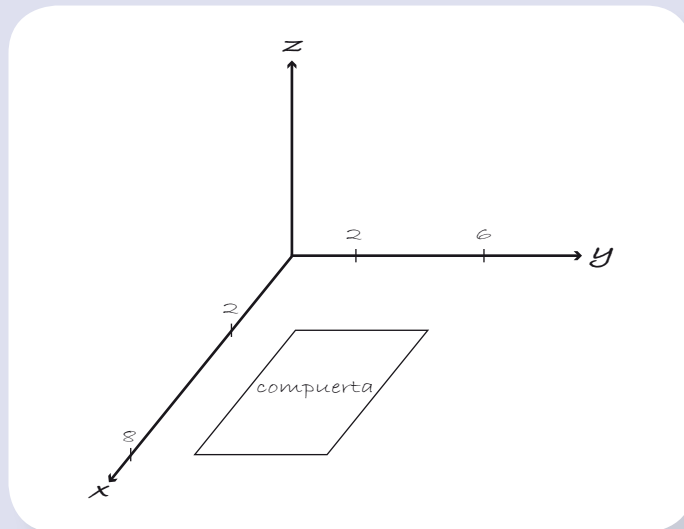
El área del triángulo es 12.5 (base por altura entre dos), entonces el volumen de la parte de arriba es 37.5 y, por lo tanto, el volumen de la figura completa es 75.

Ahora nos preguntamos por el flujo de agua en dirección de \vec{k} a través de la compuerta. Afirmamos que es 0; este resultado puede interpretarse diciendo que la cantidad de agua que fluye en esa dirección por segundo (el volumen de la parte derecha) es la misma que fluye *en dirección contraria* (el volumen de la parte izquierda). Se puede decir que el flujo es un “volumen con signo”.

1. Imaginemos un río recto donde el agua fluye con rapidez constante de 3 metros por segundo; instalemos un sistema de coordenadas cartesianas de tal forma que la parte positiva del eje y está en la dirección del movimiento del agua. Considérese a la región circular con radio de 2 metros que se encuentra sobre el plano con ecuación $y = 5$ m, como se ilustra en la figura.



- ¿Cuál es la ecuación matemática de la velocidad \vec{v} del agua?
 - Calcula el flujo de agua a través de la región circular de la figura en dirección del movimiento del agua.
 - Dibuja en la figura el sólido que se forma con la cantidad de agua que atraviesa a la región circular en un segundo.
 - ¿Cuál sería el valor del flujo a través de la misma región, pero en dirección opuesta al movimiento del agua?
 - ¿Cuál sería el flujo de agua a través de la región circular de radio 2, en dirección del eje y positivo, si la región estuviera en el plano $y = 7$, en lugar del plano $y = 5$?
 - ¿Cuál sería el flujo de agua a través de la región circular de radio 2, en dirección del eje x positivo, si ésta estuviera en el plano $x = 5$, en lugar del plano $y = 5$?
 - ¿Cuál sería el flujo de agua a través de la región circular de radio 2, en dirección del eje z positivo, si ésta estuviera en el plano $z = 3$, en lugar del plano $y = 5$?
2. Imaginemos una compuerta en el piso del salón de clases descrita por las desigualdades $3 \leq x \leq 8$ y $2 \leq y \leq 6$, y que por cada punto de ésta fluye el agua de acuerdo con la ecuación de velocidad $\vec{v} = f(x, y)\vec{k}$. En cada inciso se da una función $z = f(x, y)$ y se pide que se realice lo siguiente.



- i) Dibuja la figura que se formaría si colocáramos el vector velocidad en todos los puntos de la compuerta.
 - ii) Señalar en la figura la superficie con ecuación $z = f(x, y)$.
 - iii) Calcular el flujo de agua a través de la compuerta en la dirección positiva del eje z .
 - a) $f(x, y) = x$
 - b) $f(x, y) = y$
 - c) $f(x, y) = x^2$
 - d) $f(x, y) = x^2$
 - e) $f(x, y) = y - 4$
3. Dibuja la gráfica de cada función de dos variables $z = f(x, y)$ sobre la compuerta definida por las desigualdades $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 3$.
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $z = f(x, y) = 2 - x$ | d) $z = f(x, y) = 9 - y^2$ |
| b) $z = f(x, y) = 3 - y$ | e) $z = f(x, y) = 4e^{-x}$ |
| c) $z = f(x, y) = 4 - x^2$ | f) $z = f(x, y) = 3e^{-y}$ |
4. En el problema 3, la gráfica de la función $z = f(x, y)$ constituye la cubierta superior de una región en el espacio cuya base es la compuerta definida por las desigualdades $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 3$. Calcula para cada inciso el volumen de la región.
 5. En el problema 3, la gráfica de la función $z = f(x, y)$ constituye la cubierta superior de una región en el espacio cuya base es la compuerta definida por las desigualdades $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 3$. Escribe para cada inciso la ecuación de velocidad de un fluido cuyo flujo a través de la compuerta y en dirección del eje z positivo coincide con el volumen de la región.
 6. El agua fluye a través de la compuerta definida por las desigualdades $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ y $0 \leq y \leq 5$ de acuerdo con la ecuación de velocidad $\vec{v} = (x^2 - 1)\vec{k}$. Calcula el flujo del agua a través de la compuerta en dirección del eje z positivo.
 7. El flujo de un fluido a través de una compuerta es cero. Plantea dos escenarios posibles acerca del comportamiento del fluido que expliquen este resultado.

1.3

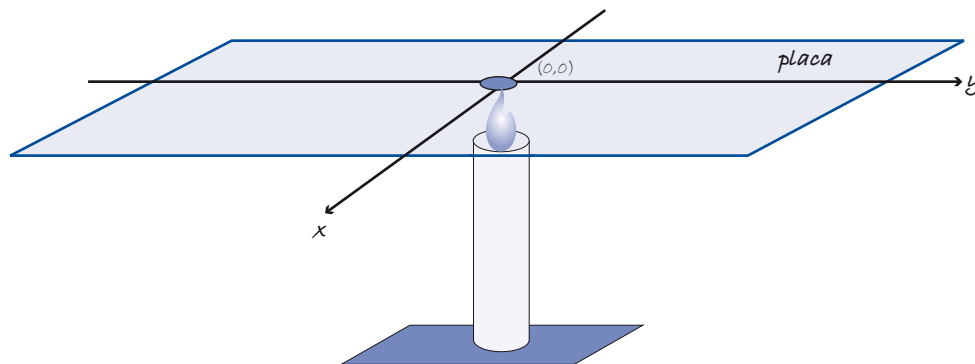
Funciones de dos variables, otros contextos

En el tema anterior vimos que cuando un fluido atraviesa una compuerta en un plano donde se ha instalado un sistema de coordenadas x y y , la rapidez r con que el fluido atraviesa la compuerta depende en general del punto de la compuerta por el que pasa el fluido. Esto conduce a una ecuación de la forma $r = f(x, y)$ donde se indica que la rapidez r depende, o es **función**, de las coordenadas x y y de los puntos de la compuerta.

El concepto de **función de dos variables** puede estar asociado a muchas situaciones de ingeniería en donde una magnitud, que representamos genéricamente por z , toma un valor que depende de los valores considerados para dos variables, que representamos por x y y . En este tema tomamos en cuenta varios contextos físicos en donde una función de dos variables resulta ser un modelo que captura la esencia del comportamiento del fenómeno bajo estudio, como las temperaturas en las diferentes posiciones de una placa o las alturas de una cuerda vibrante.

Situación-Problema 5 (SP-5)

Al colocar un sistema de coordenadas cartesianas en una placa, en donde los ejes x y y están medidos en centímetros, la temperatura en cada punto de la misma está dada por la función $T = T(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^\circ\text{C}$.



- a) Calcula la temperatura en los puntos de la placa con coordenadas: $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(-3, -5)$.

$$T(0, 0) = \underline{\hspace{2cm}} \quad T(1, 2) = \underline{\hspace{2cm}} \quad T(-3, -5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

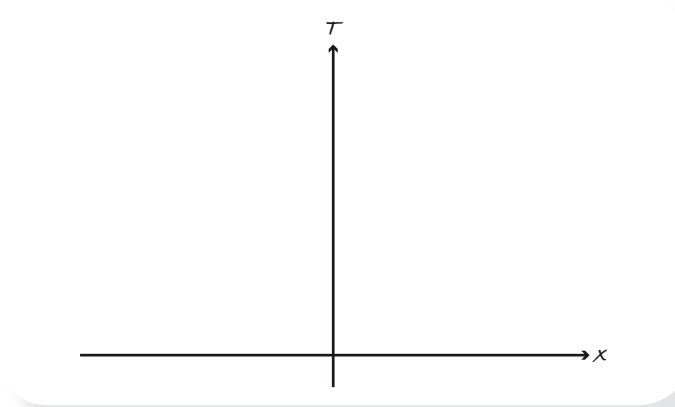
- b) Si fijamos el valor de la variable y , la temperatura sólo depende de x . Por ejemplo, si $y = 0$, entonces $T = T(x, 0) = 100 - x^2$. Obtén las fórmulas para la temperatura T en función de x cuando $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ y $y = 3$. Graficalas en un mismo sistema de coordenadas xT . ¿Qué significado le podemos dar a estas fórmulas en relación con las temperaturas?

$$T = T(x, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$T = T(x, 1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$T = T(x, 2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$T = T(x, 3) = \underline{\hspace{2cm}}$$



- c) Determina la ecuación de los puntos de la placa donde la temperatura es 0°C , ¿qué curva forman en el plano xy los puntos de la placa que cumplen esta ecuación?
- d) Determina la ecuación de los puntos de la placa donde la temperatura es 19°C , ¿qué curva forman en el plano xy los puntos de la placa que cumplen esta ecuación?

Discusión de la Situación-Problema 5

La expresión $T = T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ puede visualizarse de dos formas:

- a) Se puede escribir $T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ para indicar que T , la temperatura, está en función de los valores de las variables x y y , que en este caso representan las coordenadas de los puntos de la placa. Al sustituir un valor concreto de x y uno de y se obtiene un único valor concreto de T .

En particular tenemos que

$$T(0, 0) = 100 - (0)^2 - (0)^2 = 100^\circ\text{C};$$

$$T(1, 2) = 100 - (1)^2 - (2)^2 = 95^\circ\text{C};$$

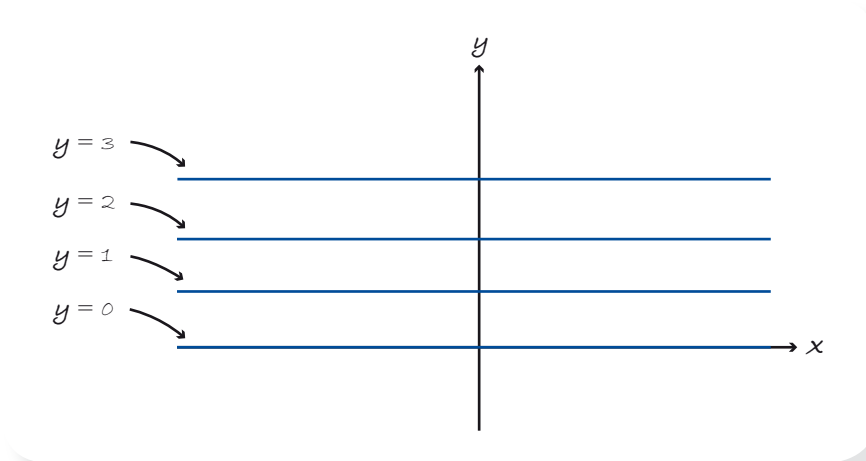
$$T(-3, -5) = 100 - (-3)^2 - (-5)^2 = 100 - 9 - 25 = 66^\circ\text{C}.$$

- b) Si escribimos solamente $T = 100 - x^2 - y^2$, podemos leer la expresión como una ecuación de tres variables: x , y y T . Si se le da un valor a una de las variables, se consigue una ecuación de las otras dos (llamada **ecuación reducida**).

En particular, si asignamos valores solamente a la variable y , obtendremos una ecuación (reducida) de las variables x y T , así, para los valores de y : 0, 1, 2 y 3, se tienen, respectivamente, las ecuaciones reducidas $T = 100 - x^2$, $T = 99 - x^2$, $T = 96 - x^2$ y $T = 91 - x^2$.

¿Qué significado concreto, en relación con la temperatura y la placa, tienen estas ecuaciones (reducidas)? La respuesta la comentaremos enseguida.

Los puntos de la placa con coordenada $y = 0$ (o puntos que satisfacen la ecuación $y = 0$) son los puntos del eje x ; los que tienen coordenada $y = 1$ forman la recta paralela al eje x que está una unidad hacia arriba de este eje, y así sucesivamente. La gráfica siguiente muestra las rectas correspondientes a los valores asignados y sus respectivas ecuaciones:

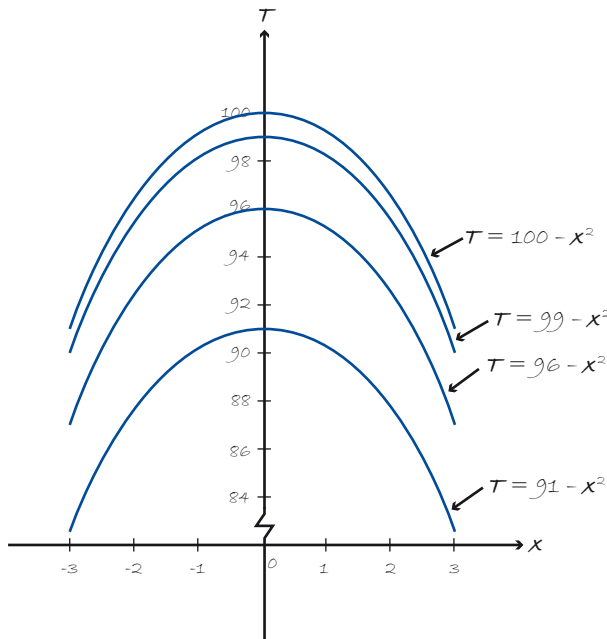


Ahora bien, si $T = T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ es la fórmula para las temperaturas en los puntos de la placa con coordenadas (x, y) , $T = T(x, 0) = 100 - x^2$ será la fórmula para la temperatura de los puntos de la placa con coordenadas $(x, 0)$, que son los puntos del eje x . Es decir, la ecuación reducida $T = 100 - x^2$ es una fórmula para la temperatura en los puntos del eje x . Cuando se toma $y = 1$, se están eligiendo los puntos de la placa que satisfacen la ecuación $y = 1$ (ve la figura anterior), y la ecuación reducida correspondiente $T = 99 - x^2$ es una fórmula para las temperaturas de los puntos de la placa en esa recta. Igualmente, la ecuación $T = 96 - x^2$ es una fórmula para (o representa) la temperatura de los puntos de la placa en la recta con ecuación $y = 2$. Finalmente, $T = 91 - x^2$ indica la distribución de temperaturas para los puntos de la placa con la ecuación $y = 3$.

Observemos que, en general, al asignar un valor fijo a y , la temperatura T está en función solamente de la variable x ; de hecho, la ecuación de las tres variables, T, x y y , se reduce a una con solamente dos: T y x . Se puede visualizar así un comportamiento gráfico de la distribución de temperaturas a lo largo de las rectas en la placa correspondientes a los valores asignados a la variable y ; esto se logra simplemente graficando en un plano xT las ecuaciones reducidas o funciones, ahora de una variable (x), tal y como se hacía en los cursos previos de Matemáticas.

Graficaremos en particular las ecuaciones reducidas obtenidas de la SP-5 en un mismo sistema de coordenadas xT . Notemos que las gráficas son de parábolas que abren hacia abajo (por el signo menos del factor cuadrático) y sus vértices, sus puntos más

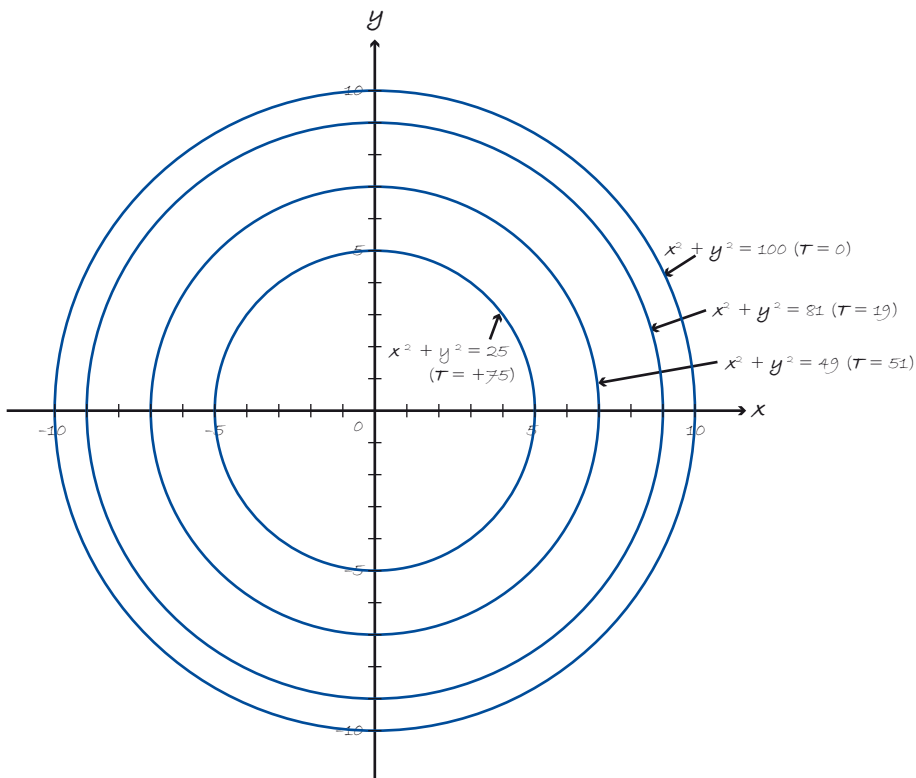
elevados, están sobre el eje τ (por la simetría respecto a este eje, el valor de τ es el mismo para un valor de x y el de su negativo, es decir, la función es par). Enseguida mostramos parte de las gráficas.



Ante la cuestión de determinar los puntos de la placa donde la temperatura es 0°C , podemos razonar del modo siguiente: la ecuación $T = 100 - x^2 - y^2$ “liga” los puntos de la placa (con coordenadas (x, y)) con sus temperaturas (T); dicho de otra manera: los números x , y y T están ligados (en el sentido de que si (x, y) son las coordenadas de un punto de la placa, entonces T es la temperatura en ese punto de acuerdo con la fórmula dada) si *satisfacen* la ecuación.

Así, si (x, y) son las coordenadas de los puntos de la placa donde la temperatura es 0°C , éstas deben satisfacer o cumplir la ecuación (reducida, por cierto) $0 = 100 - x^2 - y^2$. En general, los puntos del plano xy que cumplen esta ecuación forman una circunferencia con centro en el origen y de radio 10; esto puede advertirse si manipulamos la ecuación para ponerla en la forma $x^2 + y^2 = 100$ (en general, la ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y de radio r es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$).

De modo similar, las coordenadas de los puntos de la placa donde la temperatura es 19°C deben satisfacer la ecuación reducida $19 = 100 - x^2 - y^2$; ésta puede llevarse a la forma $x^2 + y^2 = 81$ y concluir así que los puntos de la placa donde la temperatura es de 19°C forman una circunferencia con centro en el origen y de radio 9. Enseguida mostramos un gráfico donde hemos dibujado algunas circunferencias, incluyendo las obtenidas en la discusión anterior; indicamos además los valores que fueron asignados a la temperatura para conseguir las ecuaciones correspondientes. Puede advertirse que a mayor temperatura, menor el radio de la circunferencia correspondiente.



Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 5

1. Gráficas de ecuaciones reducidas

Las curvas que obtuvimos graficando las ecuaciones reducidas permiten apreciar diferentes aspectos cualitativos de la temperatura:

- Fijando valores de x obtenemos ecuaciones cuyas gráficas en el plano yT nos brindan un aspecto cualitativo del comportamiento de la temperatura a lo largo de rectas paralelas al eje y en la placa (recordemos que en la placa hemos colocado un sistema de coordenadas xy).
- Fijando valores de y obtenemos ecuaciones cuyas gráficas en el plano xT nos brindan un aspecto cualitativo del comportamiento de la temperatura a lo largo de rectas paralelas al eje x en la placa.
- Fijando valores de T obtenemos ecuaciones cuyas gráficas en el plano xy nos muestran los puntos de la placa que tienen una misma temperatura. De hecho, estas curvas reciben el nombre de **isotermas**, que significa “con igual temperatura”.

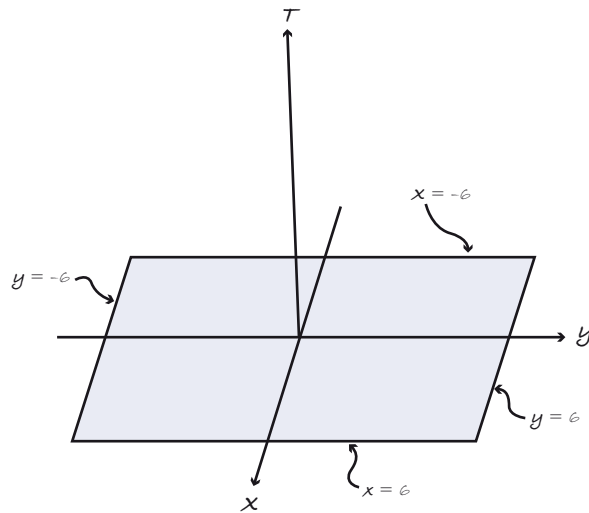
Las gráficas de las ecuaciones reducidas pueden utilizarse para visualizar la gráfica de la función de dos variables y , con ello, obtener una apreciación cualitativa del comportamiento de la magnitud que esté siendo modelada por la función. Veámoslo en el caso particular que estamos considerando, es decir, utilizaremos las curvas que hemos obtenido para construir la gráfica de la función temperatura $T = T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, limitándonos a una placa rectangular con lados paralelos a los ejes cartesianos. De hecho, en lo subsecuente detallaremos un procedimiento que utilizaremos para graficar funciones generales de dos variables; lo iremos desarrollando

con el ejemplo específico que aquí nos ocupa, después lo emplearemos para graficar otra función que estudiaremos utilizando un contexto distinto del de las temperaturas y, finalmente, lo utilizaremos para graficar funciones generales, esto último, en el siguiente tema de esta unidad.

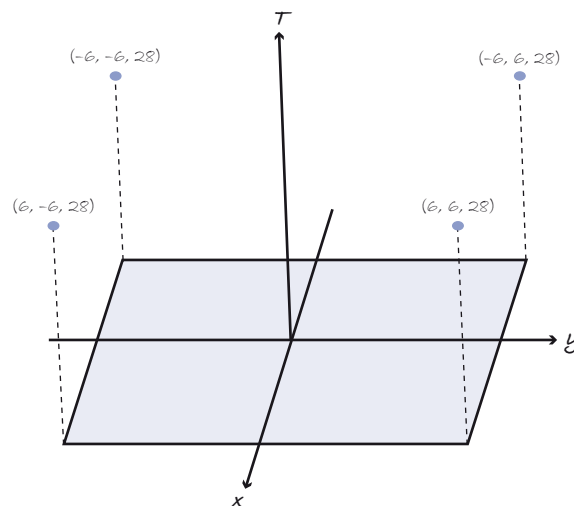
2. Procedimiento para visualizar las gráficas de funciones de dos variables.

Consideremos de nuevo la función $T = T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$.

- a) Elijamos un rectángulo en el plano xy . En el caso de las temperaturas, esto indicaría que estamos delimitando el tamaño de la placa. Se desea obtener la gráfica de la función correspondiente a este rectángulo. Tomemos por ejemplo el rectángulo $\mathcal{R}: -6 \leq x \leq 6, -6 \leq y \leq 6$; es decir, en este rectángulo están todos los puntos del plano xy que satisfacen ambas desigualdades.

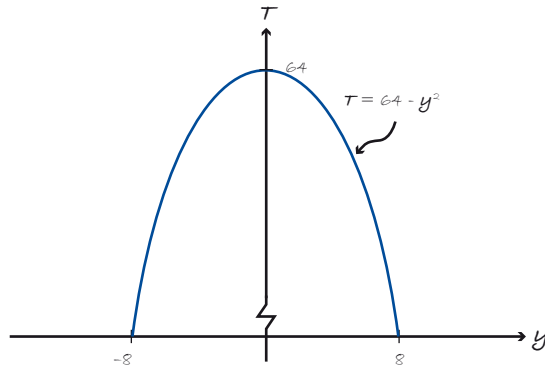


- b) Evaluemos la función en cada esquina del rectángulo y coloquemos los puntos correspondientes de la gráfica de la función.



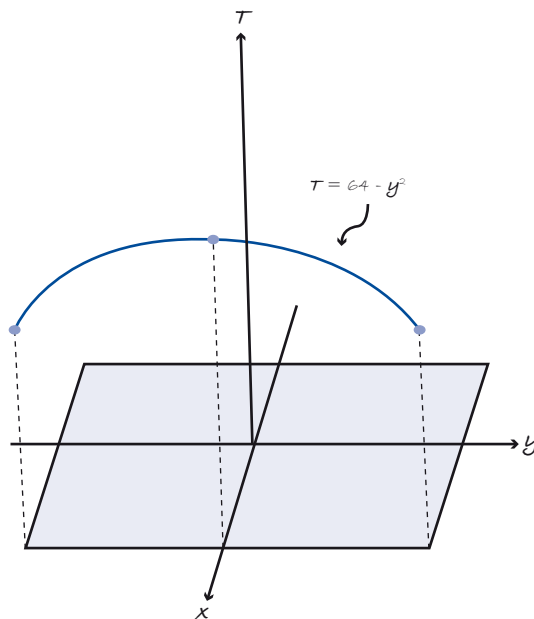
Cuatro puntos de la gráfica de $T = 100 - x^2 - y^2$ considerando las esquinas del rectángulo anterior.

- c) Consideremos el lado del rectángulo con ecuación $x = 6$, por ejemplo, y sustituimos este valor de x en la ecuación de la temperatura $T = 100 - x^2 - y^2$ para obtener la ecuación reducida $T = 64 - y^2$; ésta es la ecuación de una parábola cuyo aspecto cualitativo en el plano yT se muestra a continuación:



Esta curva, siendo considerada solamente en el plano yT , está formada por los puntos con coordenadas (y, T) , pero si tomamos en cuenta el hecho de que fue obtenida de una ecuación reducida para el valor $x = 6$, podemos visualizar la curva en el espacio tridimensional en el plano paralelo al plano yT ubicado 6 unidades al frente y con ecuación, precisamente, $x = 6$.

Coloquemos entonces la parábola anterior en el plano de enfrente de la figura del inciso b), restringida a los valores de y de -6 a 6 .



Curva de intersección de la superficie $T = 100 - x^2 - y^2$ con el plano $x = 6$.

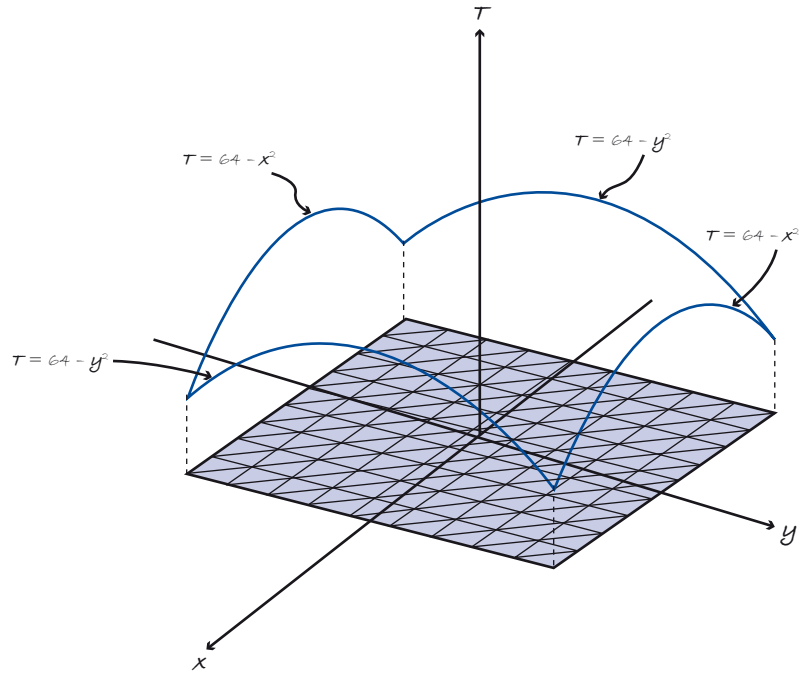
Si se realiza lo mismo para los otros lados del rectángulo, obtenemos las siguientes ecuaciones reducidas que corresponden a parábolas:

$$x = -6 \Rightarrow T = 64 - y^2$$

$$y = 6 \Rightarrow T = 64 - x^2$$

$$y = -6 \Rightarrow T = 64 - x^2$$

Al colocar estas parábolas en los planos correspondientes a la figura del espacio tridimensional, se obtiene el siguiente dibujo:

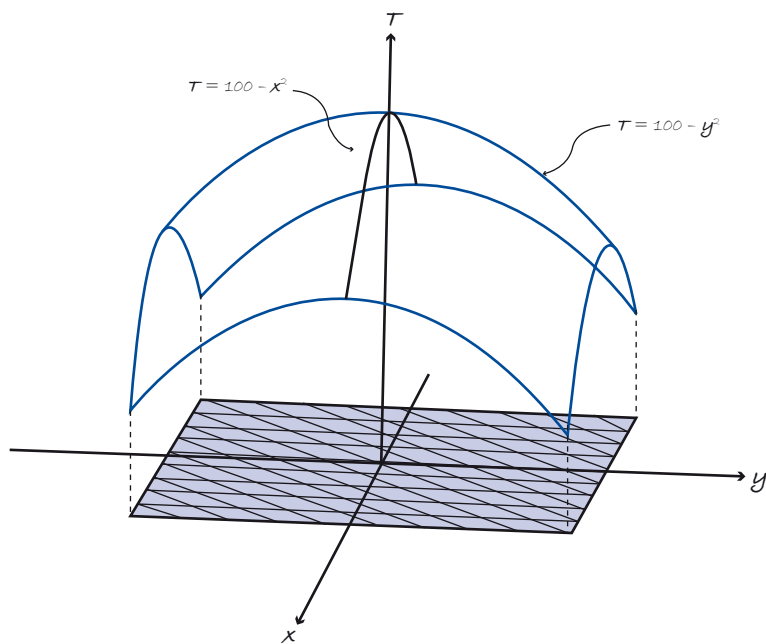


- d) Elegimos ahora una de las variables independientes, x o y , le asignamos algunos valores dentro del rango con el que se está trabajando, construimos las ecuaciones reducidas correspondientes a los valores elegidos y colocamos las gráficas en los planos respectivos. En este caso elegimos los valores $x = 0$ y $y = 0$. Las ecuaciones reducidas correspondientes son:

$$x = 0 \Rightarrow T = 100 - y^2$$

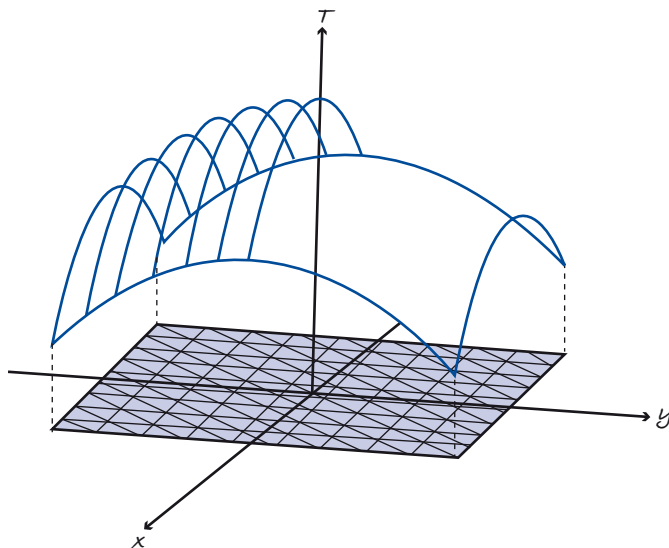
$$y = 0 \Rightarrow T = 100 - x^2$$

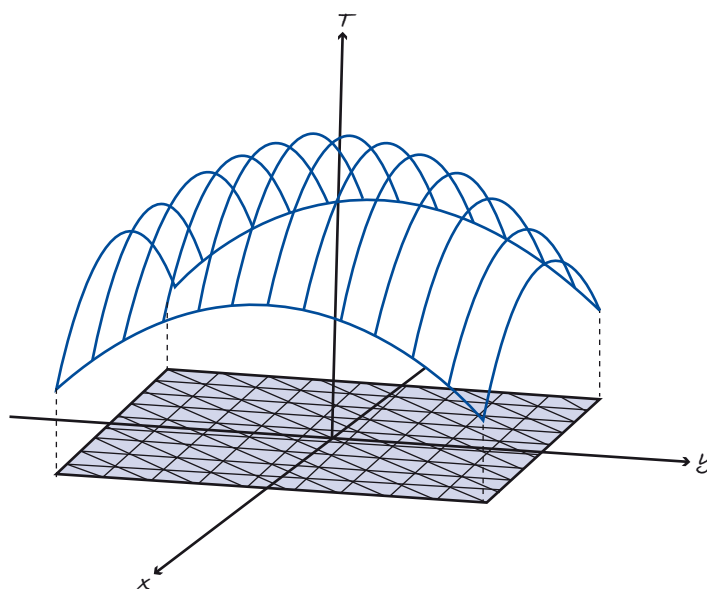
Si colocamos las gráficas de estas ecuaciones en los planos correspondientes (que son los planos coordenados yT y xT , respectivamente) en la figura anterior, tenemos ahora la siguiente imagen.



Con esto tenemos una idea global de la gráfica de la función que puede mejorarse si se colocaran más curvas correspondientes a ecuaciones reducidas para valores de x y y en los rangos establecidos.

La imagen de la gráfica que hemos presentado a través de los pasos anteriores corresponde a una visión estática de ella, es decir, la vemos formada por una colección de curvas obtenidas al intersecarla con planos con ecuaciones $x = k$ o $y = k$. Ahora queremos señalar una visión dinámica de la gráfica de la función, al ser generada colocando paulatinamente en los planos respectivos del espacio tridimensional las curvas correspondientes a las ecuaciones reducidas que se van obteniendo a medida que los valores de x (o los de y) avanzan dentro del intervalo elegido.





Construcción de la gráfica de la ecuación $T = 100 - x^2 - y^2$ sobre el rectángulo $-6 \leq x \leq 6$, $-6 \leq y \leq 6$, colocando paulatinamente las curvas de intersección de la superficie con planos paralelos al plano xT .

Esta visión dinámica de la construcción de la gráfica de la función nos da la pauta para diseñar la siguiente estrategia de graficación:

Primero, dibujar en un mismo plano algunas de las curvas asociadas a las ecuaciones reducidas que se obtienen, dándole a una variable elegida valores específicos y , posteriormente, desplegar estas curvas, es decir, ir colocando una a una de ellas en los planos correspondientes a lo largo del eje de la variable elegida.

Tenemos entonces que la gráfica de la función es una superficie que puede concebirse formada por todos los puntos del espacio cuyas coordenadas son: x , y , y el valor de T correspondiente a éstas, o bien, formada por el agregado (o colección) de las curvas de ecuaciones reducidas. Dentro de esta última visión, la gráfica puede concebirse de manera estática (con todas las curvas juntas) o dinámica (viendo el despliegue de las curvas) como lo hemos señalado.

Es importante mencionar que una colección de curvas que conforman también la gráfica de la función de la SP-5 es la obtenida cuando se le asignan valores a T , en lugar de x o y como en las discusiones anteriores. Las gráficas de las ecuaciones reducidas obtenidas así en el plano xy son llamadas **isotermas**. Si estas curvas se despliegan a lo largo del eje T , es decir, colocando cada curva a la altura correspondiente (valor de T), obtenemos una nueva perspectiva de la gráfica de la función; esta superficie puede verse ahora formada por la colección de las isotermas desplegadas.

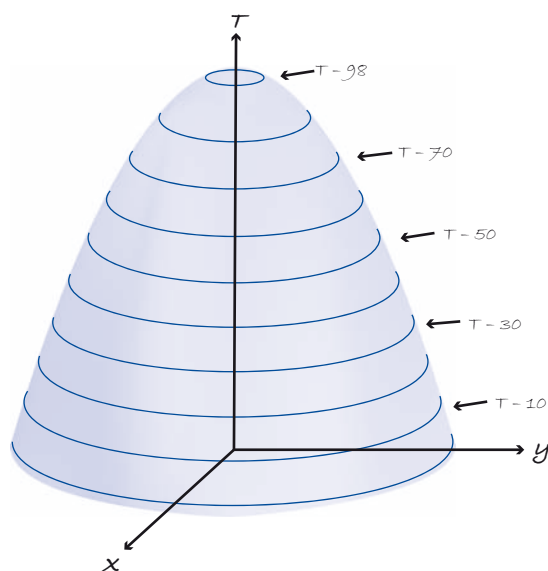
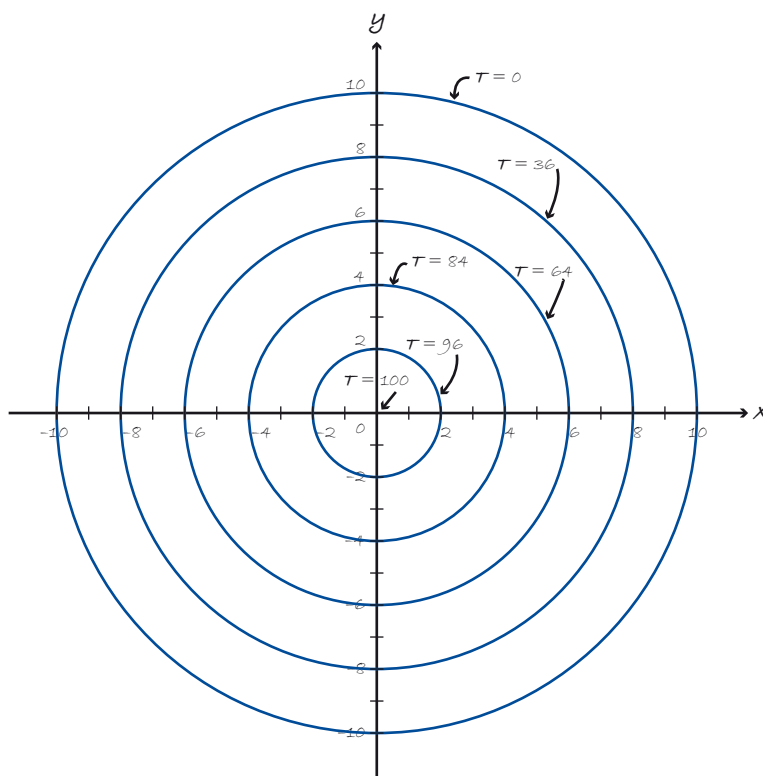


Imagen que ilustra la superficie con ecuación $T = 100 - x^2 - y^2$ como una colección de curvas de corte (circunferencias) que se forman intersecando la superficie con planos paralelos al plano o planos con ecuaciones $T = k$.



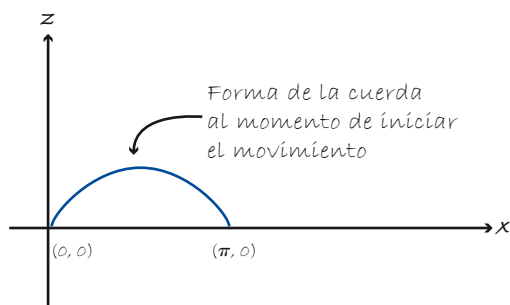
Algunas curvas isotermas de la función de temperatura $T = 100 - x^2 - y^2$.

3. Cuerda vibrante

En este punto veremos cómo una función de dos variables modela el movimiento de una cuerda que vibra; en este contexto obtendremos de nuevo las ecuaciones reducidas y descubriremos el significado de las mismas. Construiremos, además, la gráfica de la función utilizando la idea que hemos desarrollado en el punto anterior de ver la superficie como un agregado de curvas.

Enunciemos la siguiente situación-problema.

Una cuerda elástica tiene sus extremos bien fijos en los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ del eje x en el plano xz . La cuerda se estira de tal manera que adopta la forma de la gráfica de la función $z = \text{sen}(x)$, como se ve en la siguiente figura, y se suelta en el instante $t = 0$.



Supongamos que cada punto de la cuerda tiene un desplazamiento estrictamente vertical. Cada punto de la cuerda puede identificarse entonces por su posición x ; los valores de z , las alturas, dependen de qué punto x de la cuerda se trate y del tiempo t requerido. Se afirma que la función $z = f(x, t) = \cos(t/2) \text{sen}(x)$ es un buen modelo matemático para describir el movimiento de la cuerda. En lo que sigue haremos un análisis de diferentes aspectos de la función que apunten en favor de esa afirmación.

- La expresión $z = f(x, t) = \cos(t/2) \text{sen}(x)$ puede leerse de dos formas. La primera igualdad, $z = f(x, t)$, dice que z es una *función de dos variables*, de x y de t . Si eliminamos el término $f(x, t)$ de la expresión, obtenemos una *ecuación de tres variables* $z = \cos(t/2) \text{sen}(x)$.
- Si se asignan valores específicos a una de las variables, se tendrán ecuaciones reducidas (de dos variables). En particular, si se asignan valores a la variable x o a t se tendrá que z es función de una sola variable.

Si en la expresión $z = f(x, t) = \cos(t/2) \text{sen}(x)$ sustituimos t por 0 , nos queda:

$$t = 0 \Rightarrow z = f(x, 0) = \cos(0/2) \text{sen}(x) = \text{sen } x, \text{ o bien, } z = \text{sen}(x)$$

Esto indica que en cuanto a la forma inicial de la cuerda (la forma de ella en el tiempo 0), el modelo cumple esa condición.

Ahora, si sustituimos x por 0 y luego por π en la función $z = f(x, t) = \cos(t/2) \text{sen}(x)$, tenemos:

$$x = 0 \Rightarrow z = f(0, t) = \cos(t/2) \text{sen}(0) = 0, \text{ es decir, } z = 0;$$

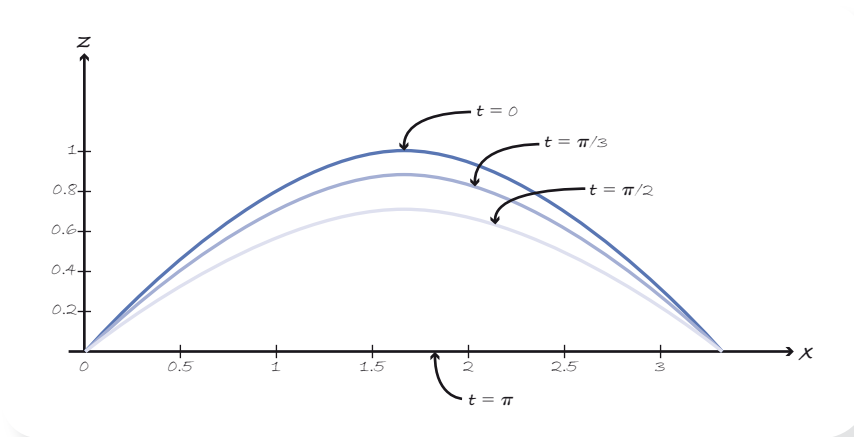
$$x = \pi \Rightarrow z = f(\pi, t) = \cos(t/2) \text{sen}(\pi) = 0, \text{ es decir, } z = 0.$$

Esto es, en los puntos extremos de la cuerda, donde $x = 0$ o $x = \pi$, tenemos que $z = 0$ para toda t . Esto significa que de acuerdo con el modelo los extremos están fijos al eje t , lo cual concuerda también con la realidad del fenómeno en estudio.

- En general, y en relación con el fenómeno de la cuerda vibrante, ¿qué significado tienen las ecuaciones reducidas cuando se asignan valores específicos de t ? Veamos.

Puesto que t representa el tiempo, x a los puntos de la cuerda, y z es la “altura” de esos puntos en esos tiempos, la ecuación reducida cuando se fija t señala las posiciones de todos los puntos de la cuerda en ese tiempo. La gráfica de la ecuación reducida modela la forma que tiene la cuerda en ese tiempo fijo. Veamos algunas de estas ecuaciones reducidas y sus respectivas gráficas en un mismo plano xz .

Función	t	Ecuación reducida
$z = \cos(t/2) \operatorname{sen} x$	$t = 0$	$z = \cos(0) \operatorname{sen} x$ $z = (1) \operatorname{sen} x$ $z = \operatorname{sen} x$
	$t = \pi/3 = 1.047$	$z = \cos(\pi/6) \operatorname{sen} x$ $z = (0.866) \operatorname{sen} x$
	$t = \pi/2 = 1.571$	$z = \cos(\pi/4) \operatorname{sen} x$ $z = (0.707) \operatorname{sen} x$
	$t = \pi = 3.1416$	$z = \cos(\pi/2) \operatorname{sen} x$ $z = 0$

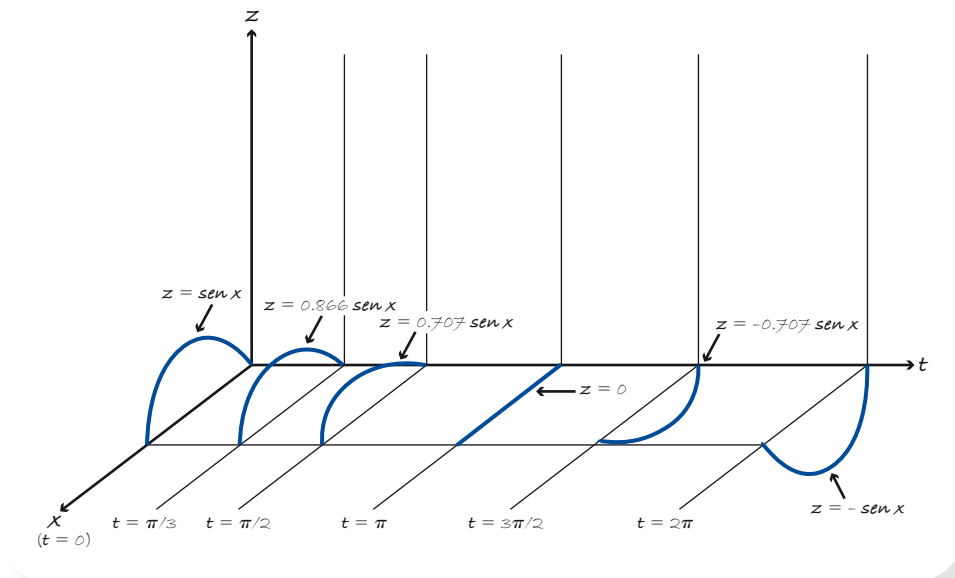


Se puede observar que en el tiempo $t = 2\pi$ todos los puntos de la cuerda están en su posición más baja; para ese valor de t la ecuación reducida es $z = -\operatorname{sen}(x)$. Adicionalmente, puede apreciarse que para $t = 4\pi$ la cuerda vuelve a tener la forma con la que empezó; la ecuación reducida correspondiente es $z = \operatorname{sen}(x)$.

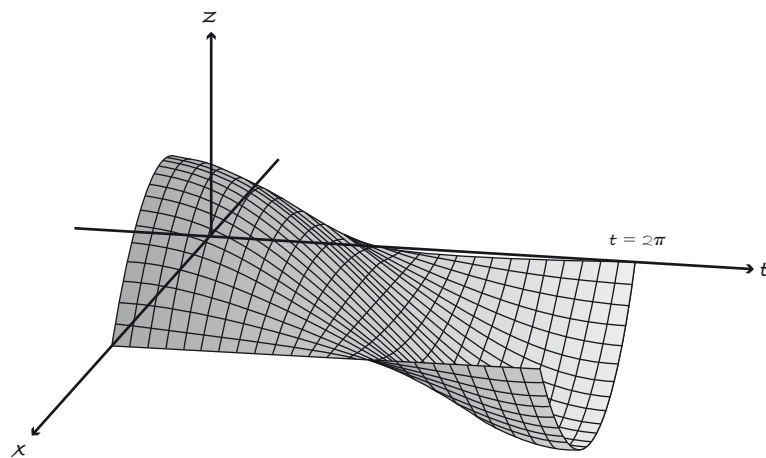
- Con ayuda de sistemas de computación algebraica podemos apreciar que la expresión $z = f(x, t) = \cos(t/2) \operatorname{sen}(x)$ es un modelo adecuado del movimiento

de la cuerda, usando comandos de animación que simulen cómo la cuerda se desplaza conforme el tiempo transcurre.

- Si agregamos el eje del tiempo al sistema xz , formamos el sistema tridimensional xtz . Dibujemos en este sistema las curvas correspondientes a las ecuaciones reducidas que se obtienen al asignar valores a la variable t , pero ahora en planos paralelos al plano xz , correspondientes a los valores asignados de t . La siguiente figura ilustra lo que queremos decir.



- Si colocáramos todas las curvas correspondientes a todos los valores de t , tendríamos la *gráfica de la función*, o gráfica de la ecuación $z = f(x, t) = \cos(t/2) \text{ sen}(x)$. Esto se aprecia en la siguiente figura.



Gráfica de $z = \cos(t/2) \text{ sen}(x)$ (una sábana o superficie).

Notemos que hemos concebido la gráfica de la función como un agregado de curvas (en este caso las distintas formas de la cuerda) al igual que hicimos en el caso de las temperaturas.

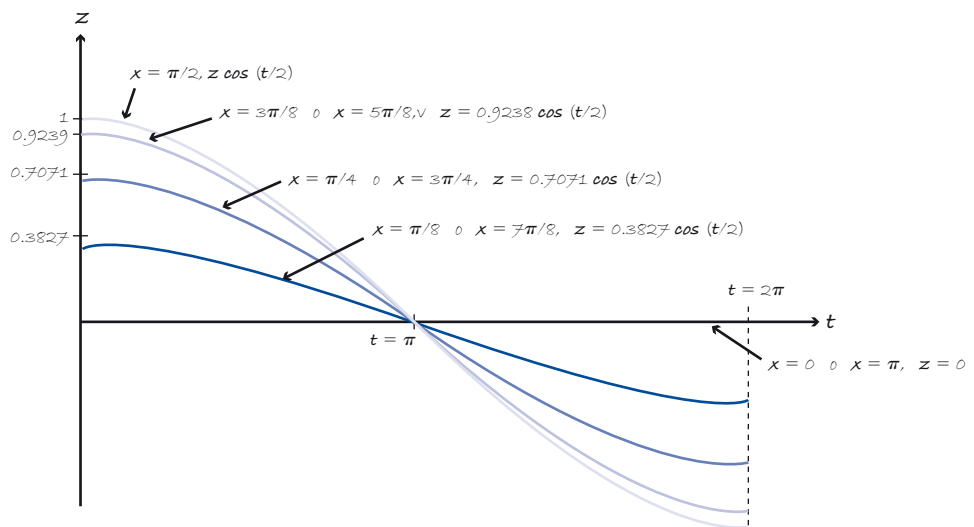
- ¿Qué pasa si en lugar de fijar el tiempo asignamos valores solamente a la variable x ? Fijar un valor de x equivale a fijar un punto de la cuerda; la ecuación reducida correspondiente (de las variables t y z) o la función de una sola variable (z en función de t) describen el movimiento (distintas alturas o posiciones) de ese punto de la cuerda a lo largo del tiempo.

Las gráficas de estas ecuaciones reducidas pueden dibujarse en un mismo plano tz , pero cuando éstas se despliegan a lo largo del eje x , volvemos a tener la gráfica de la función de dos variables. Si antes la gráfica fue concebida como la unión de las distintas formas de la cuerda a lo largo del tiempo, ahora también puede visualizarse como la unión de los movimientos de cada punto de la cuerda.

Consideremos las ecuaciones reducidas para los siguientes valores de x :

Función	x	Ecuación reducida
$z = \cos(t/2) \operatorname{sen} x$	$x = 0$ 0 $x = \pi$	$z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(0)$ $z = 0$
	$x = \pi/2 = 1.571$	$z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(1.571)$ $z = \cos(t/2)$
	$x = 3\pi/8 = 1.1781$ 0 $x = 5\pi/8 = 1.9635$	$z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(1.1781)$ 0 $z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(1.9635)$ $z = 0.9239 \cos(t/2)$
	$x = \pi/4 = 0.7857$ 0 $x = 3\pi/4 = 2.3562$	$z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(0.7857)$ 0 $z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(2.3562)$ $z = 0.7071 \cos(t/2)$
	$x = \pi/8 = 0.3927$ 0 $x = 7\pi/8 = 2.7489$	$z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(0.3927)$ 0 $z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(2.7489)$ $z = 0.3827 \cos(t/2)$

Las gráficas correspondientes a estas ecuaciones reducidas en un mismo plano tz son:



Gráficas en el plano tz de las ecuaciones reducidas que se obtienen a partir de la ecuación $z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(x)$ dándole valores específicos a la variable x . Cada gráfica representa la historia del movimiento de un punto de la cuerda, el que corresponde al valor de x considerado.

Al desplegar, a lo largo del eje x , la totalidad de las gráficas de las ecuaciones reducidas en el espacio tridimensional $x tz$, volvemos a obtener la gráfica de la superficie, la cual mostramos a continuación y donde señalamos las curvas de ecuaciones reducidas correspondientes a la figura anterior.

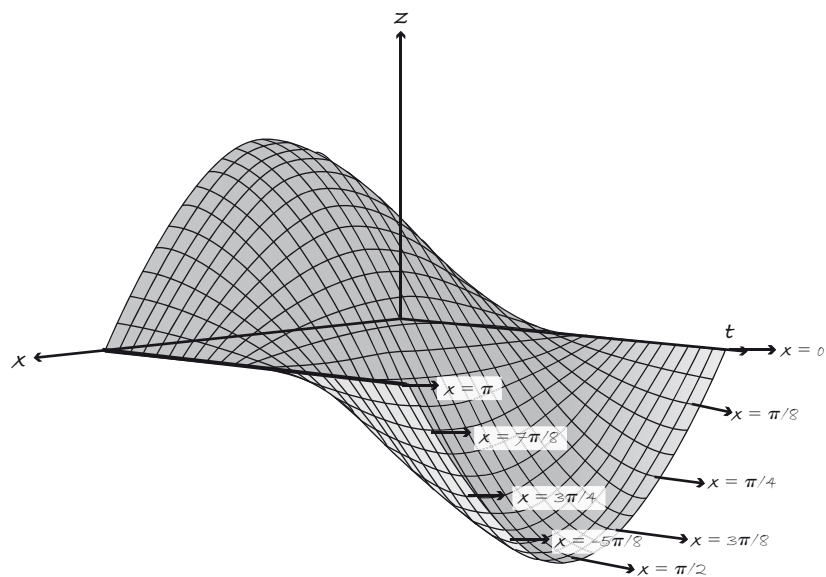


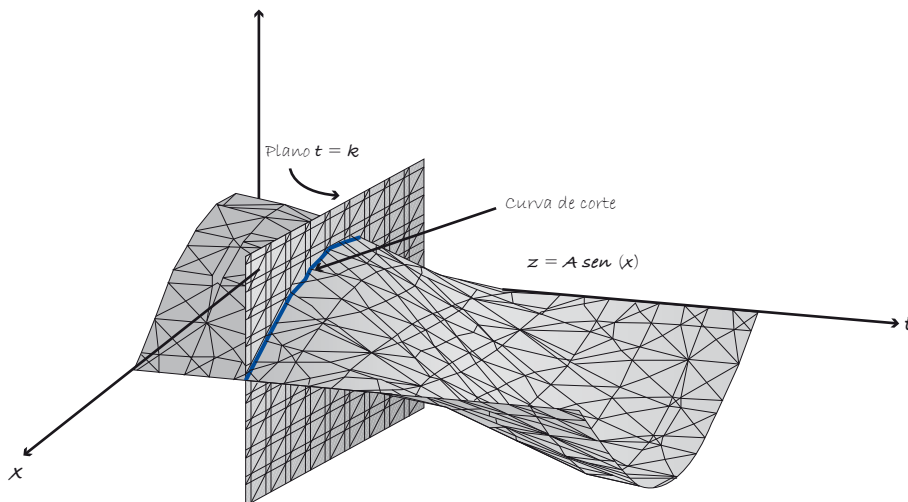
Imagen que ilustra a la superficie con ecuación $z = \cos(t/2) \operatorname{sen}(x)$ como una colección de curvas de corte (curvas tipo coseno) que se forman intersecando la superficie con planos paralelos al plano tz o planos con ecuaciones $x = k$.

4. Curvas de corte

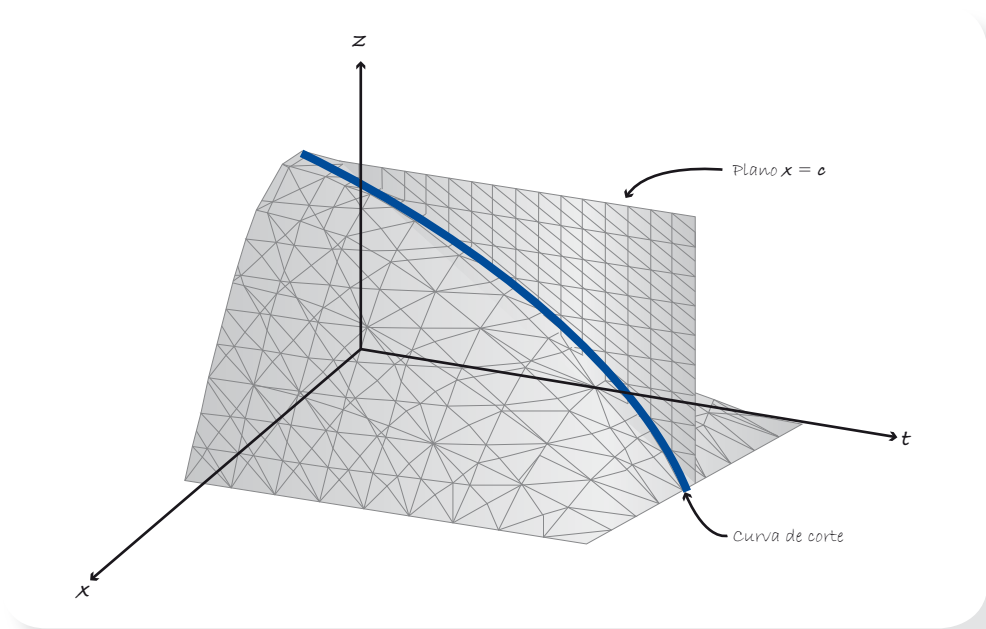
Hemos visto cómo las funciones de dos variables nos permiten modelar la distribución de temperaturas en una placa y el movimiento de la cuerda vibrante; en los ejercicios de la siguiente tarea tendremos oportunidad de estudiar otros contextos físicos donde las funciones de dos variables vuelven a hacer su aparición. Vimos que funciones de dos variables pueden reducirse a funciones de una sola variable o ecuaciones de tres variables a ecuaciones de dos, asignando valores a una de ellas. La superficie correspondiente a la gráfica de la función de dos variables puede verse como un agregado de curvas planas, las gráficas de las ecuaciones reducidas, que se despliegan en el espacio tridimensional.

Las curvas correspondientes a las gráficas de ecuaciones reducidas se les llama también **curvas de corte** porque pueden visualizarse como curvas que se obtienen al cortar una superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Si volvemos a la gráfica de la función que modela la cuerda vibrante, podemos ilustrar lo que hemos dicho.

En el siguiente dibujo se muestra la curva de corte obtenida al intersecar la superficie con el plano de ecuación $t = k$. Esta curva es la misma que se obtiene al graficar la curva reducida (al asignar el valor k a la variable t), en el plano paralelo al plano xz colocado en ese valor de t .



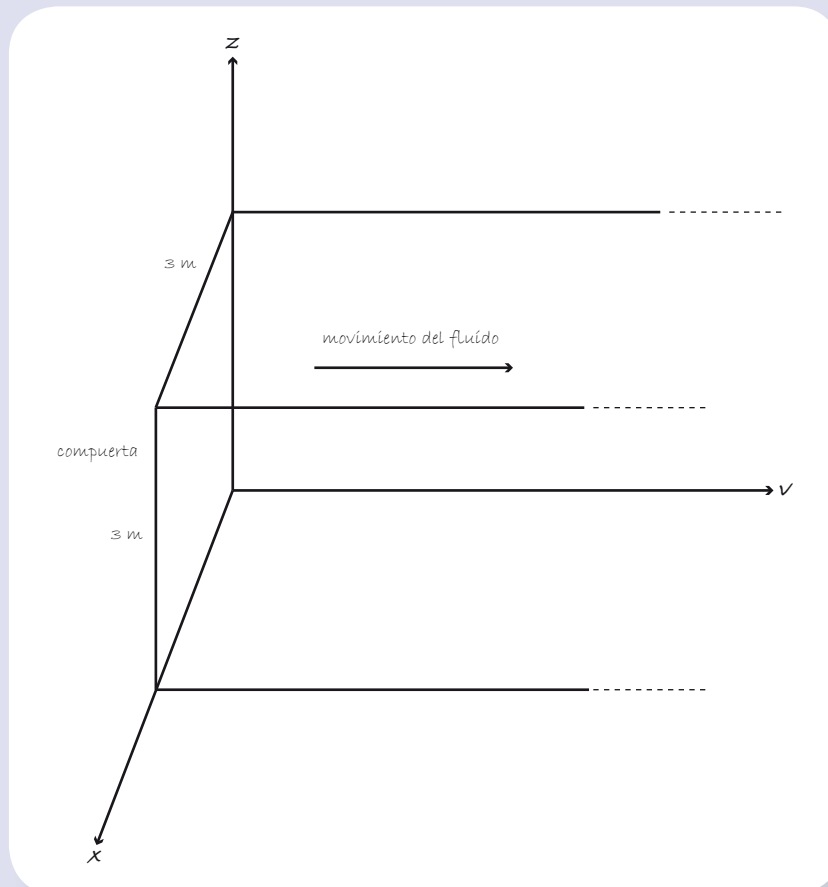
Ahora en el siguiente dibujo se tiene la curva de corte correspondiente al plano $x = c$. Esta curva es la misma que la ecuación reducida cuando se asigna a x ese valor.



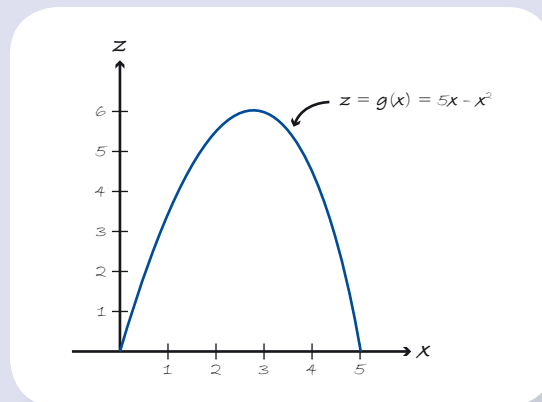
En el siguiente tema utilizaremos las curvas de corte como ayuda para graficar funciones al margen de los contextos físicos.

1. Considera una placa que se encuentra sobre el plano xy . La temperatura en cada punto (x, y) de la placa está dada por la fórmula: $T = T(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^\circ\text{C}$.

 - Interpreta el significado de las ecuaciones $T = T(x, 0)$, $T = T(x, 1)$ y $T = T(x, 2)$. Dibuja las curvas correspondientes a estas ecuaciones en el mismo plano de las variables x y T .
 - Interpreta el significado de las ecuaciones $T = T(0, y)$, $T = T(1, y)$ y $T = T(2, y)$. Dibuja las curvas correspondientes a estas ecuaciones en el mismo plano de las variables y y T .
 - Determina la ecuación de los puntos de la placa donde la temperatura es: i) 10°C , ii) 17°C , iii) 26°C . Dibuja en el plano xy las curvas de estas tres ecuaciones; ¿qué significado tienen estas curvas?
 - Haz un dibujo de la superficie con ecuación $T = T(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Interpreta en la superficie las curvas obtenidas en los inicios a), b) y c).
 - Haz un dibujo de la superficie con ecuación $T = T(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ limitada a $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ (digamos que es una placa rectangular con estas dimensiones). Coloca en la superficie las curvas obtenidas en los inicios a) y b).
2. El agua fluye a través de la compuerta rectangular en el plano xz descrita por las ecuaciones $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq z \leq 3$ con velocidad $\vec{v} = (x+z+1) \vec{j}$ y, en consecuencia, con una rapidez (que es la magnitud de la velocidad) dada por la ecuación $v = f(x, z) = x+z+1$.



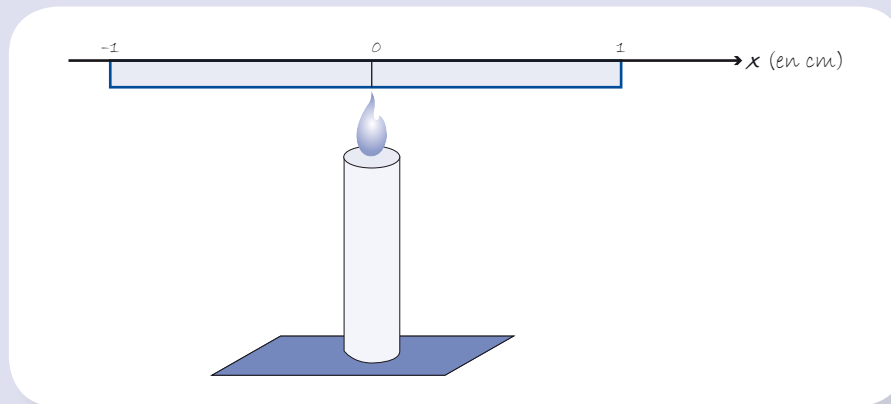
- a) ¿Cuál es la rapidez mínima del fluido a través de la compuerta?, ¿en qué punto de la compuerta se tiene esta rapidez?
 - b) ¿Cuál es la rapidez máxima del fluido a través de la compuerta?, ¿en qué punto de la compuerta se tiene esta rapidez?
 - c) Si en la compuerta fijamos el valor de la variable z , la rapidez v sólo depende de la variable x . Encuentra las fórmulas que se obtienen para la rapidez fijando los siguientes valores de z : $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ y $z = 3$. Dibuja las gráficas correspondientes en el plano xv .
 - d) Si en la compuerta fijamos el valor de la variable x , la rapidez v sólo depende de la variable z . Encuentra las fórmulas que se obtienen para la rapidez fijando los siguientes valores de x : $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$. Dibuja las gráficas correspondientes en el plano zv .
 - e) ¿Qué curva forman en la compuerta los puntos en donde la velocidad es 4 m/s?
 - f) Dibuja la figura que se formaría si colocaras el vector velocidad correspondiente a cada punto de la compuerta.
 - g) Dibuja la gráfica de $y = f(x, z) = x + z + 1$ (la superficie que se forma considerando sólo las puntas de los vectores velocidad) correspondiente a la compuerta.
3. Considera una cuerda que está fija a los extremos $(0, 0)$ y $(5, 0)$ del plano xz y que se estira para adoptar la forma de parábola con ecuación $z = g(x) = 5x - x^2$, como se muestra en la figura.



Supongamos que la cuerda se suelta en el instante $t = 0$ y que tendrá, como es de esperarse, un movimiento oscilatorio. Admitamos que la cuerda tardará 2π segundos en dar un ciclo completo, es decir, regresar a su posición original.

- a) Tomemos el punto de la cuerda donde $x = 3$, su altura inicial, esto es, en $t = 0$, es $z = g(3) = 6$. Describe con tus palabras el movimiento de ese punto a medida que el tiempo transcurre, ¿cuánto es la amplitud? Obtén una posible fórmula que exprese la altura z de ese punto conforme transcurre el tiempo.
- b) Tomemos ahora un punto cualquiera de la cuerda, con abscisa x ; su altura inicial, esto es, en $t = 0$, es $z = g(x) = 5x - x^2$. Describe el movimiento de ese punto a medida que el tiempo transcurre, ¿cuánto es la amplitud? Obtén una posible fórmula que exprese la altura z de ese punto conforme transcurre el tiempo. Ésta es la fórmula que modela el movimiento de la cuerda.
- c) Grafica en el plano xz las posiciones de la cuerda en los tiempos $t = \pi/2$, $t = \pi$ y $t = 3\pi/2$. Usa la fórmula obtenida en el inciso b).

- d) Grafica en el plano tz las historias del movimiento de los puntos de la cuerda donde $x=1, x=2$ y $x=3$. Usa la fórmula obtenida en el inciso b).
- e) Obtén la gráfica obtenida en el inciso b) limitada al rectángulo $0 \leq x \leq 5, 0 \leq t \leq \pi$.
4. Se calienta una varilla metálica delgada como se muestra en la siguiente figura.



A partir de cierto momento ($t = 0$) se retira la fuente de caloar.

Supongamos que la ecuación $T(x, t) = 50e^{-x^2} \cos(t/4)$ modela la distribución de temperatura en cada punto x de la varilla y cada tiempo posterior t , donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Para cada uno de los siguientes valores de t : $t = 0, t = \pi/2, t = \pi$

- i) Escribe la ecuación reducida correspondiente.
- ii) Dibuja la gráfica correspondiente a cada ecuación reducida.

¿Qué representa cada ecuación reducida respecto al fenómeno físico?

Muestra las tres gráficas en un mismo plano.

b) Utiliza algún recurso tecnológico para graficar

$$T(x, t) = 50e^{-x^2} \cos(t/4), \text{ donde } -1 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq t \leq 2.$$

c) Si ahora tomamos el valor de $x = 1/2$, obtén:

- i) La ecuación reducida. ¿Qué representa esta ecuación respecto al fenómeno físico?
- ii) La gráfica de la ecuación.

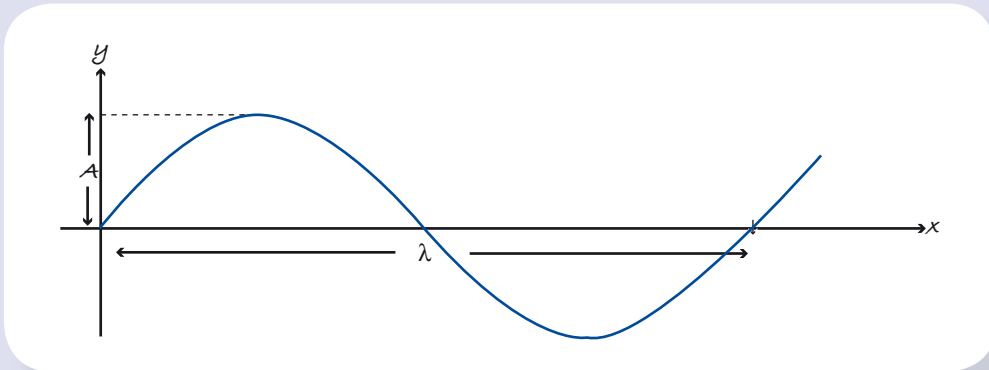
d) En la gráfica de $T(x, t) = 50e^{-x^2} \cos(t/4)$ obtenida en el inciso b), resalta las graficas que obtuviste en los incisos a) y c).

5. **Propagación de una onda.** Muchos fenómenos de la Naturaleza, como el sonido y la luz, viajan a través de ondas cuyo movimiento puede modelarse con funciones senoidales.

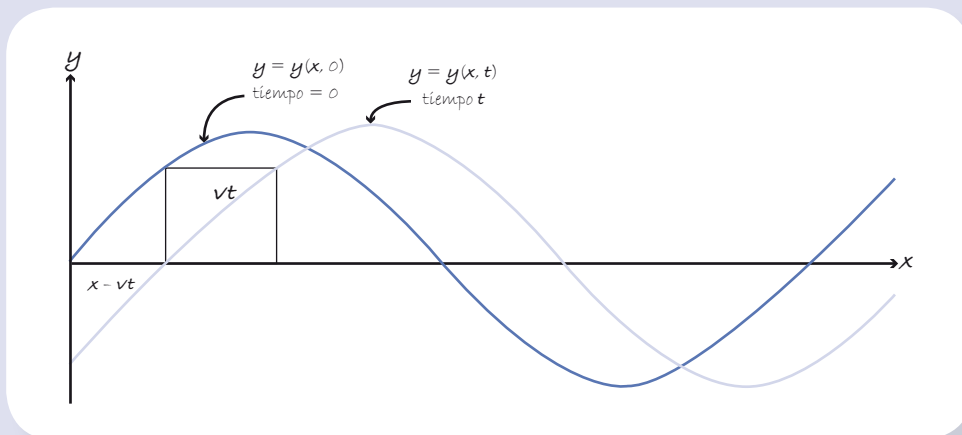
Ingresa a la página http://www.cbu.edu/~jvarrian/applets/waves1/lontra_g.htm para que veas el movimiento de una onda transversal.

Si centramos un eje x en la dirección del movimiento de la onda a la altura y de la onda correspondiente al valor x en el tiempo t , la representaremos por $y(x, t)$.

- a) A continuación te mostramos la forma de la onda correspondiente al tiempo $t = 0$. Esto es, la gráfica de la función $y = y(x, 0)$. Si el periodo o longitud de onda es λ y la amplitud es A , obtén la fórmula para $y = y(x, 0)$.



- b) En la siguiente gráfica te mostramos la forma de la onda en el tiempo $t = 0$ y en un tiempo t arbitrario posterior. Éstas son las formas de las gráficas de $y = y(x, 0)$ y $y = y(x, t)$, respectivamente. Si la onda viaja a una velocidad v , la distancia horizontal entre las gráficas es vt , y como se ve en el dibujo, $y(x, t) = y(x - vt, 0)$. Obtén con base en esto la fórmula general de $y = y(x, t)$:



- c) Si fijamos el valor de x y vemos a y como función de t , el movimiento de propagación de la onda se limita a un punto que sube y baja verticalmente.
- Si el parámetro v aumenta, ¿qué pasa con la velocidad de movimiento de este punto?
 - Si el parámetro λ aumenta, ¿qué pasa con la velocidad de movimiento de este punto?
- Argumenta tus respuestas.

1.4

Gráficas de funciones de dos variables y de ecuaciones de tres

Hay dos maneras de visualizar una curva. Una manera estática, donde se contempla la curva como si fuera una fotografía; y una manera dinámica, en la que la curva se traza por el movimiento de un punto, como si fuera una película.

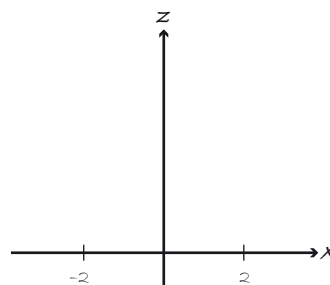
De manera análoga, hay dos maneras de visualizar una superficie. La estática, donde se contempla de golpe una superficie o una porción de ella; y la dinámica, donde la superficie se traza por el movimiento de una curva, que incluso puede ir cambiando conforme se desplaza.

En este tema presentaremos una estrategia para trazar o imaginar la superficie correspondiente a una función de dos variables o ecuación de tres variables de acuerdo con la visión dinámica que hemos comentado, es decir, viendo a la superficie formándose por un despliegue de curvas, que no son otras más que las curvas de corte de la superficie. Iniciemos este tema con la siguiente situación-problema.

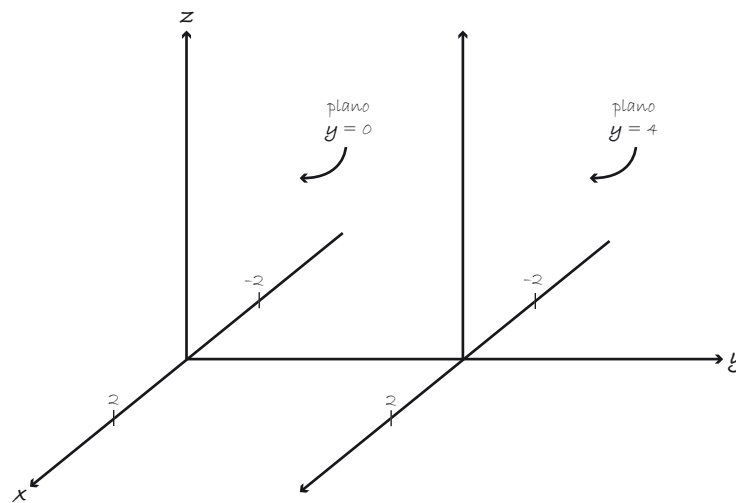
Situación-Problema 6 (SP-6)

Considera la función de dos variables $z = f(x, y) = y + x^2$, o ecuación de tres variables: $z = y + x^2$.

1. Obtén las ecuaciones reducidas correspondientes a los valores $y = 0$, $y = 1$ y $y = 4$. ¿Qué tipo de curvas son?
2. Dibuja en el plano xz la gráfica correspondiente a cada ecuación.



3. En la siguiente figura se señalan los planos $y = 0$ (plano xz) y $y = 4$. Dibuja las gráficas de las ecuaciones reducidas para $y = 0$ en el plano xz y para $y = 4$ en el plano $y = 4$.

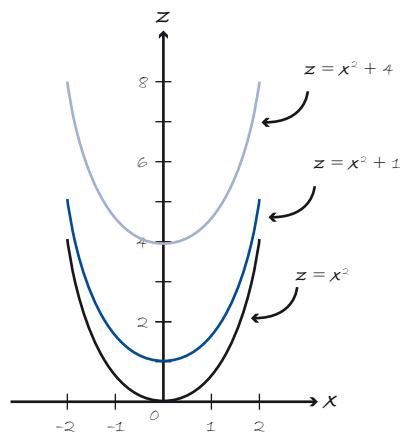


4. En general, si tomamos la ecuación de tres variables $z = y + x^2$ y se dan valores a la variable y , se obtiene una familia de ecuaciones de las variables x y z (y , en consecuencia, una familia de curvas).
- Identifica el tipo de curvas que forman a la familia.
 - ¿Qué tienen en común?, ¿qué las distingue unas de otras?
5. Si colocáramos cada parábola de la familia (en el sistema tridimensional) en el plano correspondiente al valor de y asociado a ella:
- ¿En qué plano están todos los vértices de las parábolas?
 - ¿Qué figura forman los vértices?, ¿cuál es la ecuación de esta figura?
6. Considera el rectángulo \mathcal{R} : $-2 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 4$ en el plano xy . Haz un dibujo de la gráfica de $z = y + x^2$ limitada a ese rectángulo. Empieza colocando los puntos de la gráfica correspondientes a las esquinas del rectángulo, después apóyate en lo que has desarrollado en los puntos anteriores de esta situación-problema para completar la gráfica.

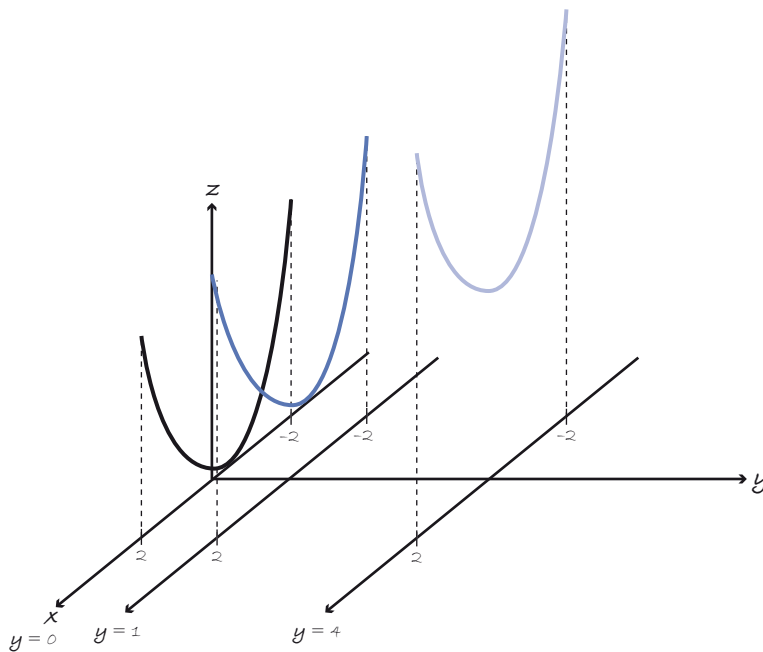
Discusión de la Situación-Problema 6

Si asignamos valores a una de las variables en la ecuación $z = y + x^2$ obtenemos una ecuación reducida de dos variables; en particular, si asignamos los valores 0, 1 y 4 a y , obtenemos las ecuaciones $z = x^2$, $z = 1 + x^2$ y $z = 4 + x^2$, respectivamente.

Estas ecuaciones pueden graficarse en un mismo plano xz , como se muestra a continuación:



Estas ecuaciones también pueden graficarse en el espacio xyz colocando cada una de las gráficas anteriores en los planos con ecuaciones $y = 0$, $y = 1$ y $y = 4$, respectivamente. El siguiente dibujo ilustra lo anterior.



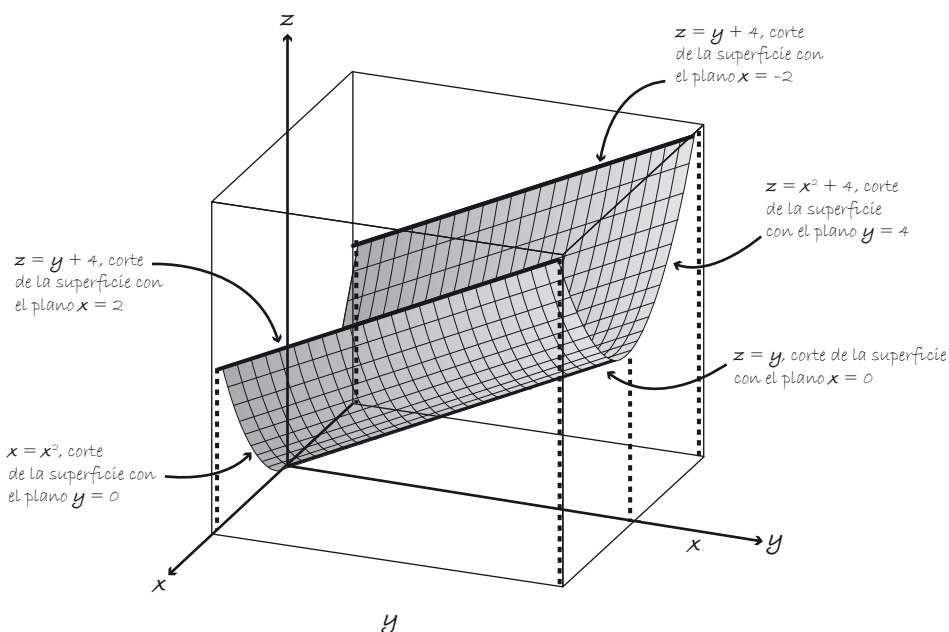
En general, y como habrás notado, cada valor que se asigne a la variable y genera la ecuación de una parábola; más aún, la ecuación $z = y + x^2$ puede verse como una familia de ecuaciones de parábolas, pensando en los distintos valores que se le pueden asignar a y . De hecho, esta familia puede escribirse también así: $z = c + x^2$, donde c es una constante arbitraria.

Las parábolas que constituyen esta familia pueden graficarse en un sistema de dos dimensiones xz , abren hacia arriba, tienen su vértice sobre el eje z (por lo tanto,

son simétricas respecto a ese eje) pero, precisamente, la diferencia entre estas parábolas es la posición exacta de sus vértices que depende del valor de c : el vértice está en $z = c$ del eje z o en el punto con coordenadas $(0, c)$ del plano xz . Una parábola está más arriba o abajo que otra de la misma familia según sean los valores de c .

Ahora bien, si cada parábola de la familia es dibujada en su plano correspondiente del espacio tridimensional (plano paralelo al xz con ecuación $y = c$) las coordenadas de los vértices serían $x = 0$ (ya que en el plano xz el vértice está en el eje z , cuya ecuación es precisamente $x = 0$), $y = c$ (porque la parábola se dibuja en el plano con esa misma ecuación), y $z = c$ (porque la ecuación de la parábola es $z = c + x^2$). Es decir, las coordenadas de los vértices están dadas por la terna $(0, c, c)$, de donde puede decirse que los vértices están en el plano yz (con ecuación $x = 0$) y forman ahí la recta con la ecuación $z = y$.

Finalmente, si nos limitamos a los puntos del plano xy que forman el rectángulo $R: -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$, y reunimos toda la información que hemos obtenido, podemos convencernos de que la gráfica de la ecuación $z = y + x^2$ es la que se muestra en la siguiente figura.



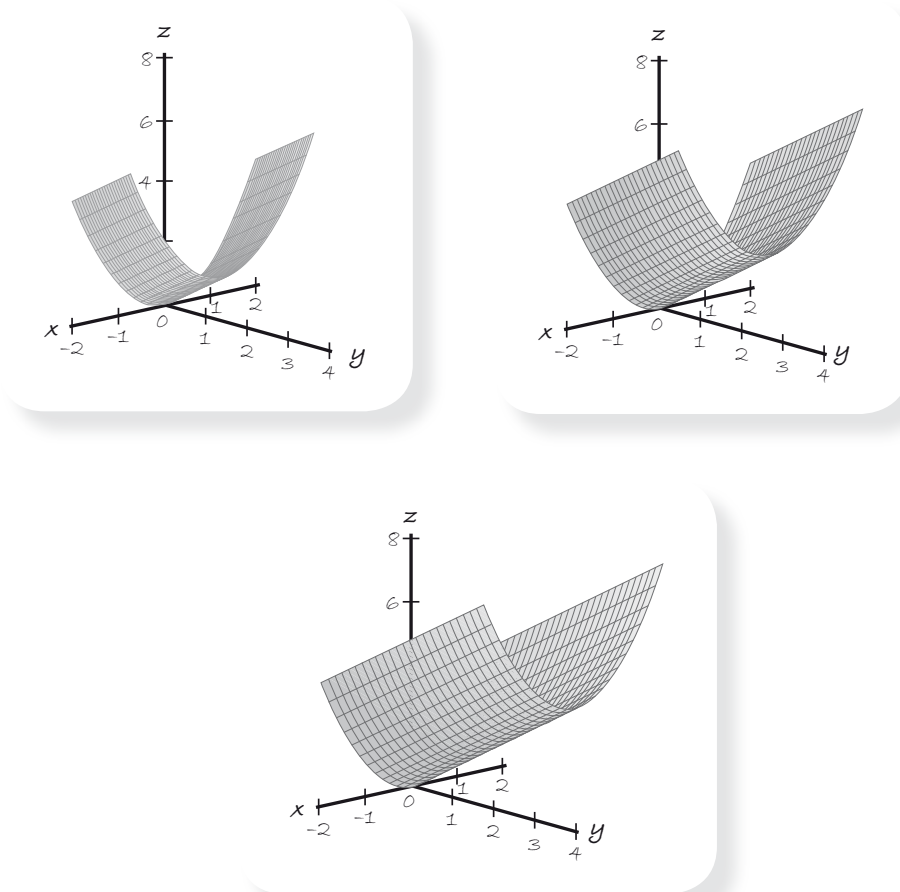
Gráfica de la superficie con ecuación $z = y + x^2$ sobre el rectángulo: $-2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$.

Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 6

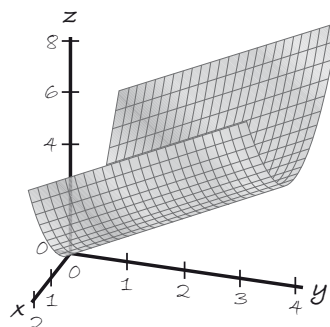
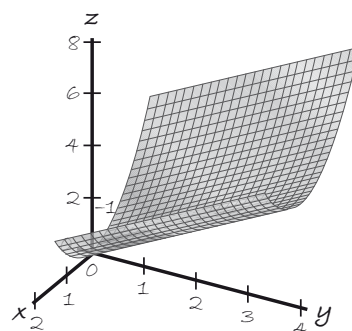
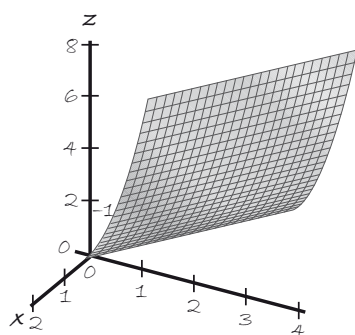
1. Construcción dinámica de la gráfica de $z = y + x^2$

Podemos utilizar un sistema de computación algebraica para dibujar la gráfica de la ecuación de la SP-6. De hecho, la figura anterior se hizo auxiliándonos con uno de estos sistemas. Más aún, usando los comandos de animación del sistema, la gráfica puede construirse dinámicamente desplegando paulatinamente sus curvas de corte.

Si en la ecuación $z = y + x^2$ se van asignando valores en orden creciente a la variable y , se puede ver con ayuda de alguno de estos recursos computacionales cómo se va formando la gráfica de la ecuación mediante el trazo continuo de una serie de parábolas agregándose a lo largo del eje y . La siguiente secuencia de figuras intenta mostrarlo:



Observemos que si en la ecuación $z = y + x^2$ le damos ahora valores a la variable x , obtendremos ecuaciones reducidas con variables z y y cuyas gráficas son rectas. Aunque esas rectas pueden graficarse en un mismo plano zy , al desplegarlas en el espacio tridimensional, a lo largo del eje x , se tendrá la misma gráfica que obtuvimos de $z = y + x^2$, sólo que esta vez se verá como un agregado de rectas. Una animación en tal sentido puede realizarse con el apoyo de los recursos computacionales que estamos señalando; la siguiente secuencia de figuras intenta mostrar este despliegue.



2. Construcción dinámica de la gráfica de una función de dos variables

En general, si tenemos una función de dos variables $z = f(x, y)$, podemos reproducir los pasos de la SP-6 para visualizar la superficie correspondiente a su gráfica. Es decir, podemos asignar valores a una de las variables y obtener una familia de funciones de una variable cuyas gráficas, al ser desplegadas, permiten visualizar la superficie, pensando en ésta como un agregado de curvas. Tendremos oportunidad de practicar esta idea con las funciones dadas en el ejercicio 1 de la Tarea 4.

3. Gráficas de ecuaciones de tres variables

Cabe señalar que, aunque la función $z = f(x, y)$ pueda verse como una ecuación de tres variables, no toda ecuación de tres variables corresponde a una función de dos variables. Tomemos como ejemplo la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, ninguna de las variables es una función de las otras dos (recuerda que para que una variable u sea función de una variable v en determinada ecuación es preciso que al reducir la ecuación al asignar cualquier valor a v no sea posible que dos o más valores de u cumplan la ecuación reducida). Sin embargo, las ideas que hemos desarrollado anteriormente para graficar pueden aplicarse a ecuaciones de tres variables en general; es decir, se puede obtener una familia de ecuaciones reducidas (dándole valores a una de las variables) y desplegar las gráficas correspondientes. Veámoslo en este mismo ejemplo.

Si asignamos valores a una de las variables, obtenemos ecuaciones reducidas de las otras dos; así, si evaluamos x , digamos que $x = k$, obtenemos la familia de ecuaciones $z^2 = k^2 + y^2$, que puede reescribirse como $z^2 - y^2 = k^2$. Si ahora tenemos que $x = k$ (es decir, damos valores a la y), obtenemos la familia de ecuaciones $z^2 = x^2 + k^2$, que reescribimos como $z^2 - x^2 = k^2$. También podemos asignar valores a z (lo que no

hemos hecho en lo que va de este tema), es decir, tomar $z = k$, con lo que se obtiene $k^2 = x^2 + y^2$. La siguiente tabla resume lo anterior.

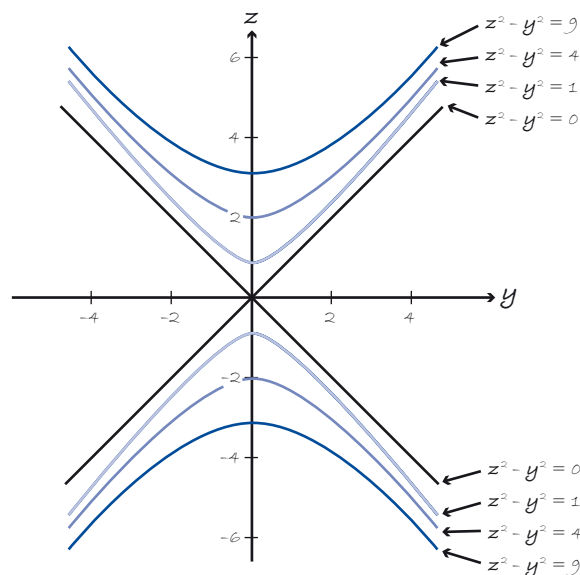
Asignación de valores	Evaluación	Familia de ecuaciones
$x = k$	$z^2 = k^2 + y^2$	$z^2 - y^2 = k^2$
$y = k$	$z^2 = x^2 + k^2$	$z^2 - x^2 = k^2$
$z = k$	$k^2 = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = k^2$

La reescritura de las ecuaciones que aparece en la última columna tiene el fin de facilitar su identificación gráfica. Al final de este tema, antes de la Tarea 4, presentaremos un cuadro que identifica determinada clase de curvas con algunos tipos de ecuaciones, como las que aparecen aquí.

Tomemos algunos valores específicos y tracemos las gráficas correspondientes en un mismo plano, para cada una de las familias de ecuaciones.

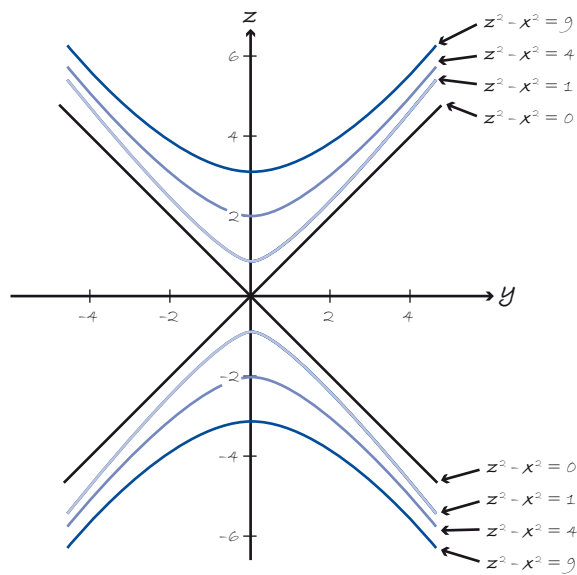
Asignando valores a x :

$x = k$	$z^2 - y^2 = k^2$
$x = 0$	$z^2 - y^2 = 0$
$x = \pm 1$	$z^2 - y^2 = 1$
$x = \pm 2$	$z^2 - y^2 = 4$
$x = \pm 3$	$z^2 - y^2 = 9$



Asignando valores a y :

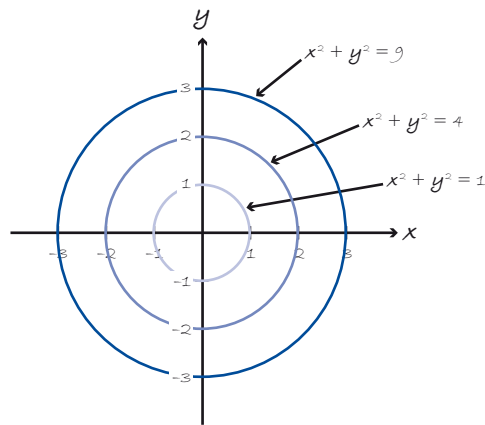
$y = k$	$z^2 - y^2 = k^2$
$y = 0$	$z^2 - x^2 = 0$
$y = \pm 1$	$z^2 - x^2 = 1$
$y = \pm 2$	$z^2 - x^2 = 4$
$y = \pm 3$	$z^2 - x^2 = 9$



Las curvas anteriores son **hipérbolas**; de hecho, el par de rectas que aparece en cada figura puede considerarse como un caso límite de hipérbola. Más adelante veremos que estas curvas se obtienen al hacer cierto tipo de cortes a un cono, de ahí que se diga que pertenecen a la familia de las **cónicas**.

Asignando valores a z :

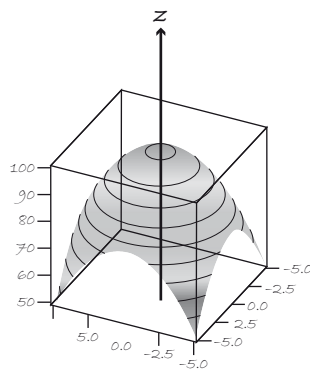
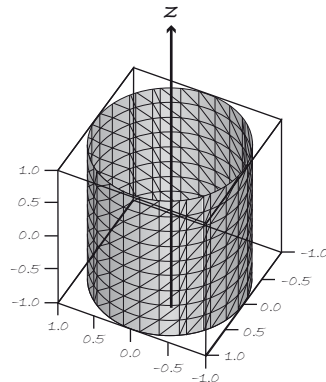
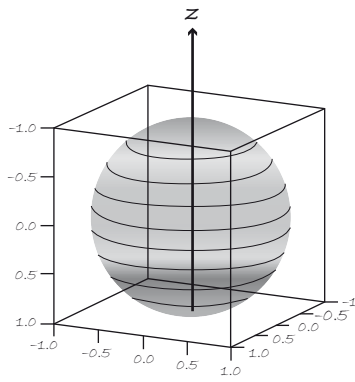
$z = k$	$x^2 + y^2 = k^2$
$z = 0$	$x^2 + y^2 = 0$
$z = \pm 1$	$x^2 + y^2 = 1$
$z = \pm 2$	$x^2 + y^2 = 4$
$z = \pm 3$	$x^2 + y^2 = 9$



Las curvas correspondientes a esta última familia de ecuaciones son circunferencias en el plano xy , con centro en el origen y de radio $|k|$; de hecho, el origen puede considerarse una circunferencia de radio 0.

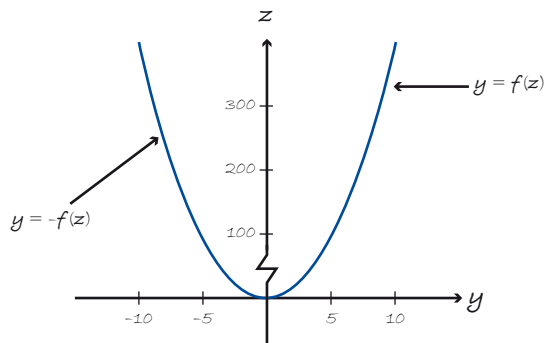
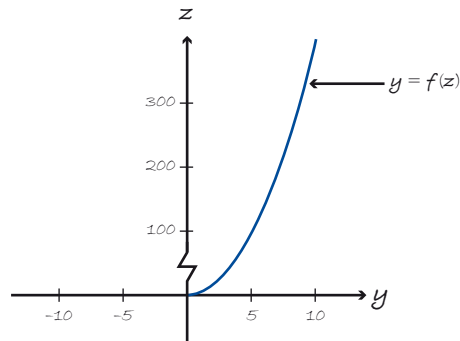
Dado que estamos más familiarizados con las circunferencias que con las hipérbolas, trataremos de visualizar la gráfica de la superficie correspondiente a la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, desplegando a lo largo del eje z estas circunferencias.

Ahora bien, es claro que hay una infinidad de superficies que pueden obtenerse desplegando circunferencias a lo largo del eje z ; ve las siguientes figuras.



En general, cualquier superficie formada como un agregado de circunferencias a lo largo de una recta, y todas con centro en ella, se identifica como una **superficie de revolución**; de aquí que si queremos tener una idea más precisa de cómo es la gráfica de una superficie de la que ya sabemos que es de revolución, basta identificar y graficar la curva que estaría rotando, en nuestro caso, alrededor del eje z , para generar la superficie.

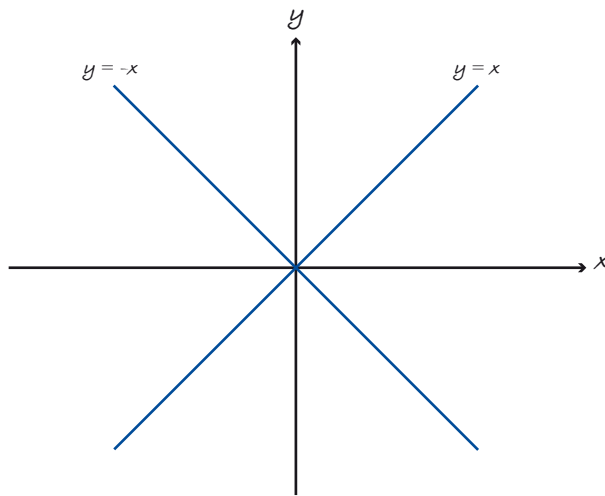
Recordemos algunos detalles de las superficies de revolución. Una curva en el plano zy , por ejemplo la gráfica de la función $y = f(z)$, genera una superficie de revolución al rotarla alrededor del eje z . Observemos las siguientes figuras.



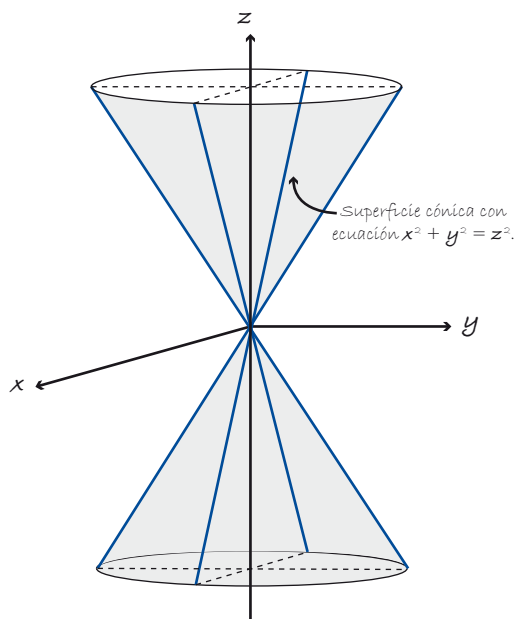
Dos hechos que queremos destacar en relación con las dos curvas de la última figura son los siguientes:

- Ambas pueden representarse por una sola ecuación $y^2 = (f(z))^2$.
- Si volvemos a la superficie de revolución, en el espacio tridimensional xyz , estas curvas se obtienen al intersecar (o cortar) la superficie con el plano zy . Cualquiera que sea la ecuación de una superficie, las ecuaciones de estas curvas de corte corresponden a la ecuación reducida cuando se toma $x = 0$ (en general, a las curvas que se obtienen de las ecuaciones reducidas al darle el valor 0 a cualquiera de las variables, se les llama **trazas**).

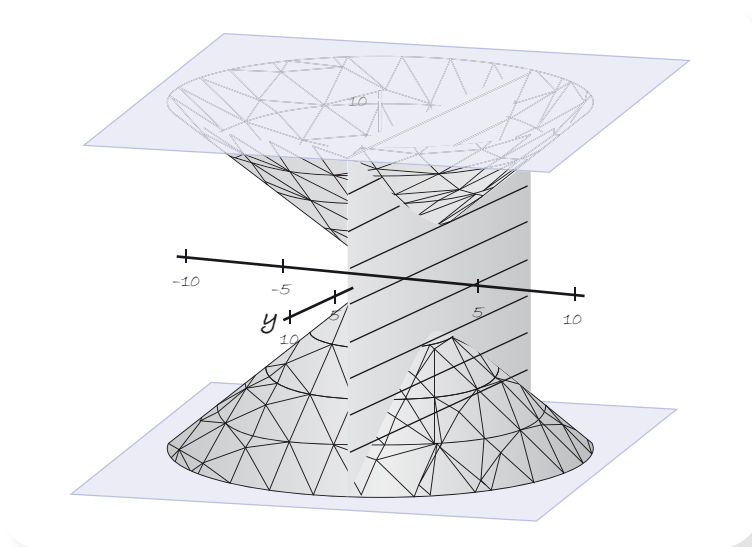
Volviendo a la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, tenemos que la ecuación reducida correspondiente a $x = 0$ es $y^2 = z^2$; esta última ecuación engloba dos ecuaciones: $y = z$ y $y = -z$. Las gráficas de estas dos ecuaciones (la traza $x = 0$) son dos rectas que ilustramos enseguida.



Al girar estas rectas (de hecho, puede girarse una sola), tenemos la superficie que corresponde a la ecuación de tres variables $x^2 + y^2 = z^2$: un **cono**.



Las secciones cónicas son las curvas que se obtienen al cortar el cono con planos. En particular, al cortar el cono con planos perpendiculares al xy se forman hipérbolas y, al cortarlo con planos paralelos al plano xy , se forman círculos, como puede observarse en la siguiente figura.



Un elemento que hemos añadido aquí para graficar superficies de revolución puede usarse para visualizar la gráfica de una ecuación general de tres variables. Nos referimos a las llamadas *trazas*: son curvas planas correspondientes a ecuaciones reducidas cuando se asigna el valor particular de cero a algunas de las variables. Este nuevo elemento es considerado en la estrategia general que enunciamos enseguida para graficar ecuaciones de tres variables.

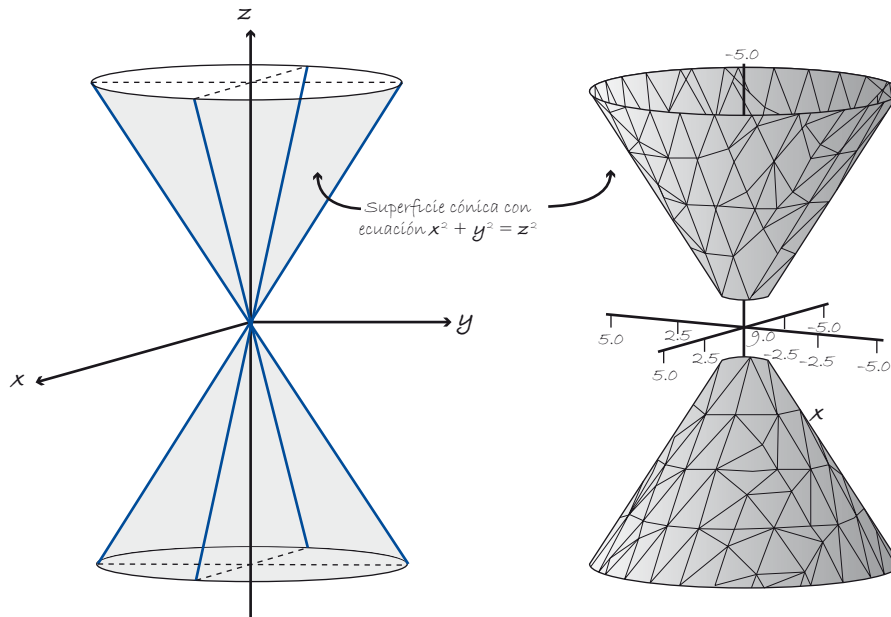
4. Guía para visualizar la gráfica de una ecuación de tres variables

- a) Obtener, a partir de la ecuación dada, las tres familias de ecuaciones reducidas, sustituyendo cada vez una variable por una constante.
- b) Identificar el tipo de gráfica correspondiente a, por lo menos, un tipo de ecuación reducida. Puedes asignar valores concretos a las variables y graficar las ecuaciones resultantes.
- c) Dibujar en un mismo plano algunas gráficas de la familia de ecuaciones reducidas de la que ya identificaste el tipo de gráfica. Identificar el efecto en las gráficas de los distintos valores que se asignan.
 Aquí se puede hacer un primer esfuerzo por identificar la gráfica pedida, tratando de visualizar la superficie que se forma desplegando las gráficas del inciso c) a lo largo del eje de la variable a la que se le asignaron los valores concretos.
- d) Obtener la ecuación de las trazas (esto se logra asignando el valor 0 a cada variable en la ecuación original de tres variables). Graficar en el plano correspondiente cada traza.
- e) Dibujar un sistema tridimensional donde se muestren las trazas.
- f) Desplegar las gráficas de las ecuaciones reducidas en el sistema tridimensional anterior.

En este momento ya se debe tener una idea más clara de la superficie asociada a la ecuación de tres variables.

Es recomendable apoyarte en algún recurso tecnológico para corroborar la idea que te hiciste sobre la superficie realizando los puntos anteriores. Es importante señalar que el recurso tecnológico no vuelve innecesario el trabajo que se realiza

“a mano”; ambos tipos de trabajo se complementan y profundizan en el conocimiento de lo que se estudia. Si no podemos realizar un trabajo de análisis como el que proponemos en la guía anterior, podemos creer que la gráfica del cono con ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ es la figura que arroja el recurso computacional que se está usando, lo cual no es cierto... del todo.



Figuras cónicas que representan a la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, la de la derecha es obtenida con un recurso computacional, y en ella puede verse la omisión de una porción de superficie cerca del vértice.

Ejemplo. Graficar la ecuación $y + z^2 = x^2$ siguiendo la guía anterior.

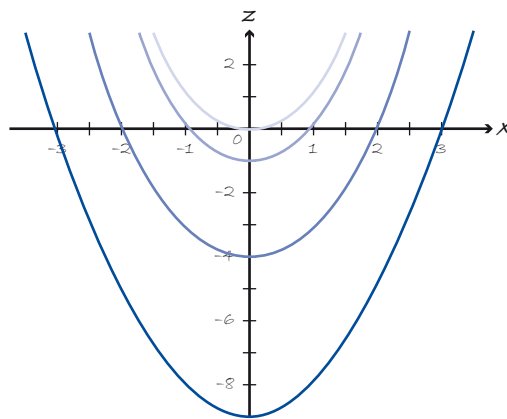
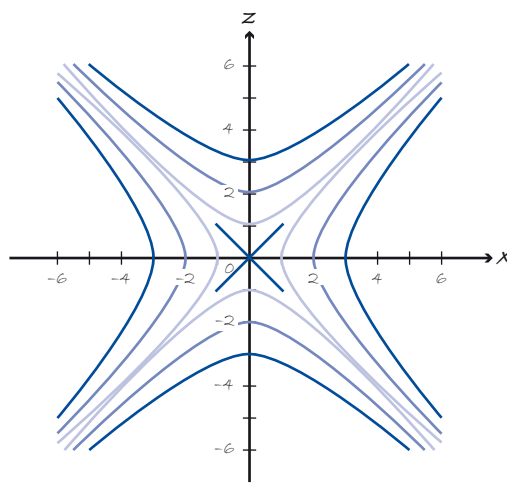
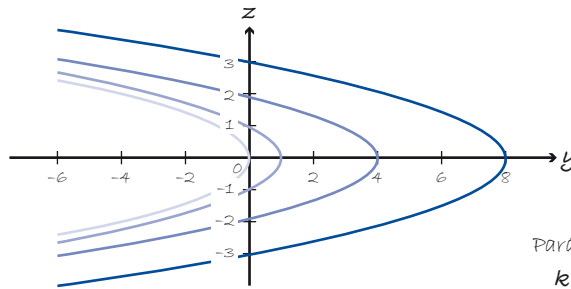
a) Familias de ecuaciones reducidas.

$x = k$	$y + z^2 = k^2$	$y = k^2 - z^2$
$y = k$	$k + z^2 = x^2$	$x^2 - z^2 = k$
$z = k$	$y + k^2 = x^2$	$y = x^2 - k^2$

La tercera columna refleja una forma de presentar la familia de ecuaciones reducidas de tal manera que favorezca reconocer el estilo de la gráfica.

b) La primera y la última ecuaciones representan familias de parábolas; en la primera, las parábolas están en el plano zy , abren hacia el eje y negativo y son simétricas respecto a ese mismo eje. En la tercera, las parábolas están en el plano xy , abren hacia el eje y positivo y son simétricas respecto al mismo. La segunda ecuación representa una familia de hipérbolas.

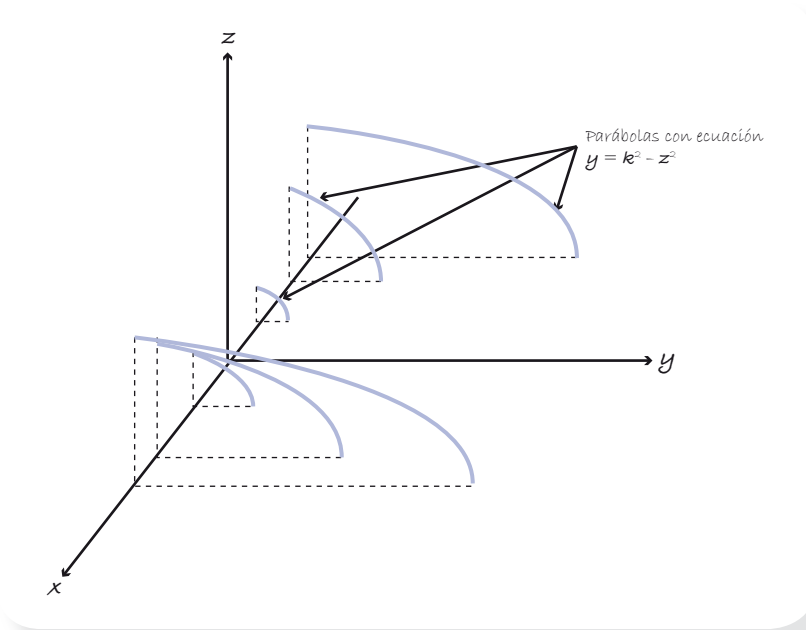
c) Mostramos a continuación algunas parábolas e hipérbolas correspondientes a estas familias en sus respectivos planos.



En realidad aquí, respecto a lo que se dice en el inciso b) de la guía, hemos identificado las tres familias. Concentrémonos en la primera familia para proceder con los demás incisos. Un buen ejercicio para ti sería tomar cada una de las otras dos familias y proceder con el resto de la instrucción; esto puede enriquecer la visión de la gráfica final.

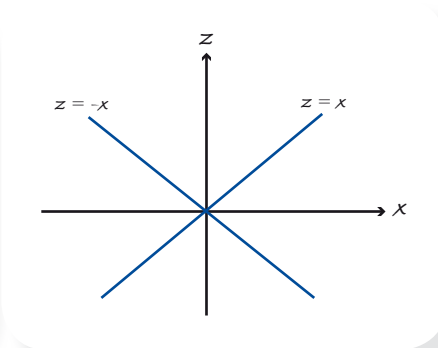
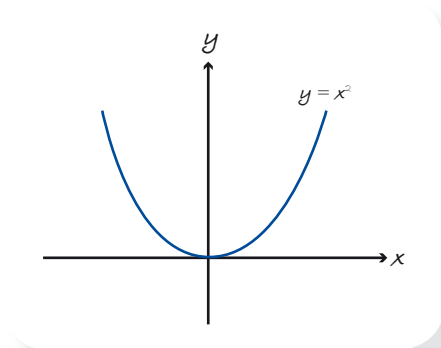
El efecto que tiene la constante k en las parábolas correspondientes a la ecuación $y = k^2 - z^2$ es el de un movimiento de traslación a lo largo del eje y . Se puede notar que el valor mínimo de k^2 es 0 (y, por lo tanto, los vértices van del 0 al infinito sobre el eje y).

Si desplegamos las gráficas obtenidas de la primera ecuación, agregando el eje x , obtenemos:

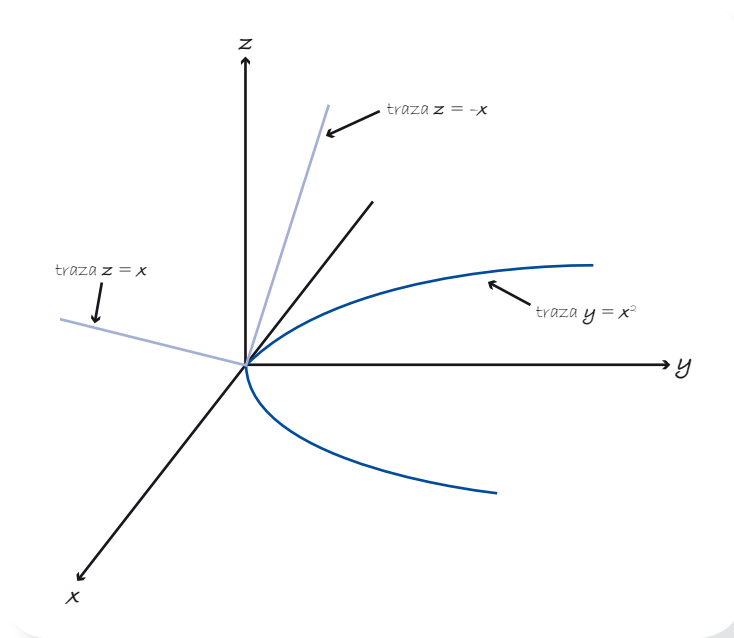


¿En este momento ya tienes una idea de cómo es la superficie?

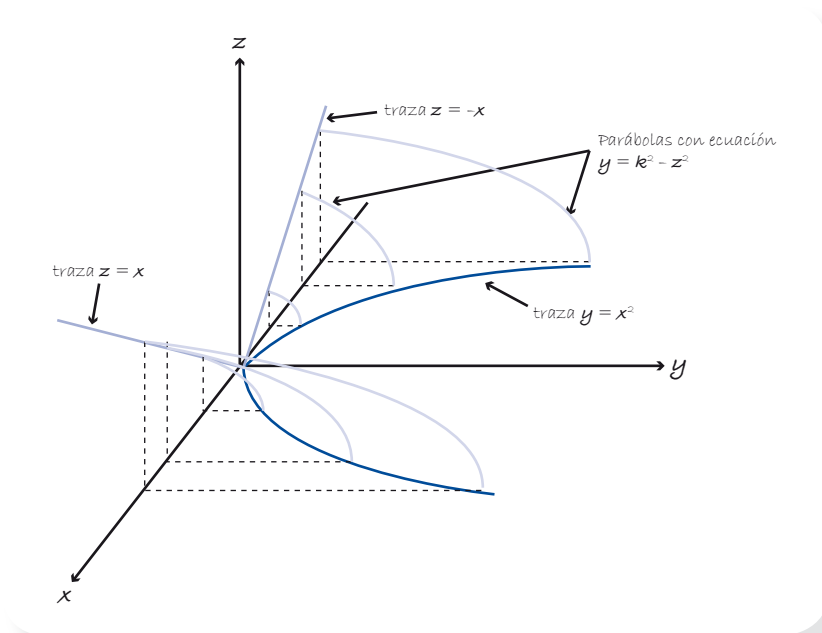
d) Ya que nos concentramos en la ecuación $y = k^2 - z^2$, las trazas que debemos obtener son las correspondientes a $y = 0$ y $z = 0$; es decir, al sustituir estos valores en la ecuación original $y + z^2 = x^2$, obtenemos, respectivamente, las ecuaciones $z^2 = x^2$ y $y = x^2$. Las gráficas de estas ecuaciones en los planos xz y xy son, respectivamente:



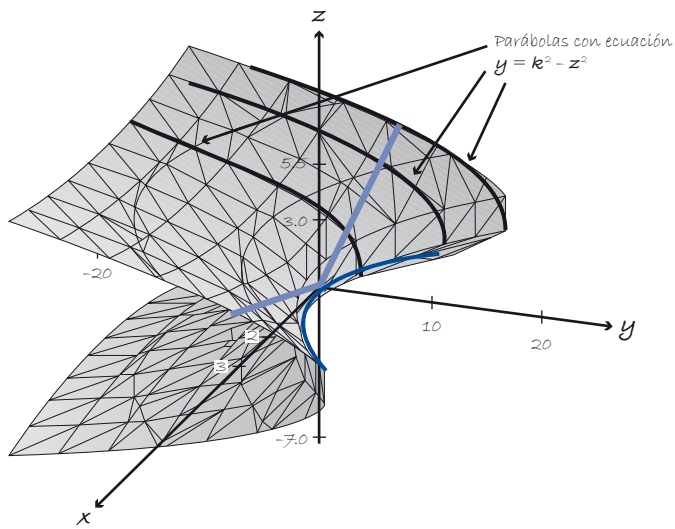
e) Dibujamos un sistema tridimensional donde se delinean en sus respectivos planos las trazas del inciso anterior.



f) Si ahora en la figura anterior desplegamos la familia de parábolas elegida, se obtiene:



La siguiente gráfica se obtiene con un recurso computacional. Sobre ella hemos señalado las curvas que construimos en los puntos anteriores y que nos permitieron tener una visualización adecuada de la gráfica pedida.

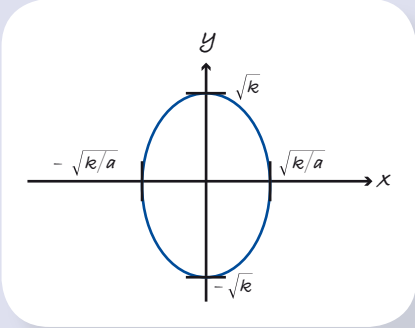
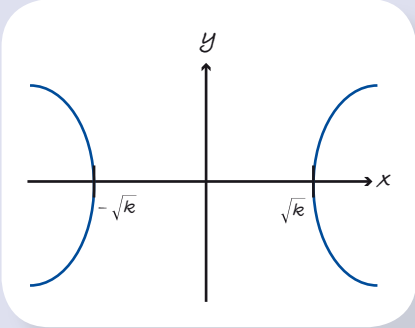
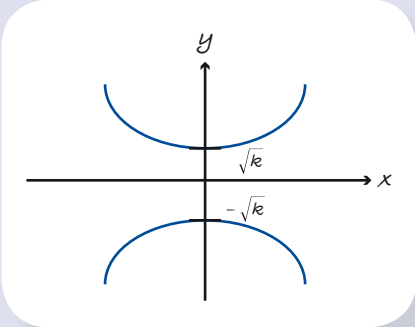


5. Ecuaciones comunes de dos variables y sus gráficas

Ecuación	Gráfica	Figura
$x^2 + y^2 = c^2$		Círculo
$x^2 + ay^2 = k$ $a > 0 \quad k > 0$		Elipse

(continúa)

(continuación)

Ecuación	Gráfica	Figura
$ax^2 + y^2 = k$ $a > 0 \quad k > 0$		Elipse
$x^2 - ay^2 = k$ $a > 0 \quad k > 0$		Hipérbola
$y^2 - ax^2 = k$ $a > 0 \quad k > 0$		

1. Considera las siguientes funciones de dos variables y el rectángulo adjunto:

a) $z = yx^2; \mathcal{R}: -2 \leq x \leq 2; -3 \leq y \leq 3$

b) $z = y \operatorname{sen} x; \mathcal{R}: -\pi \leq x \leq \pi; -3 \leq y \leq 3$

c) $z = y + e^x; \mathcal{R}: -2 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 3$

d) $z = 2x + y + 1; \mathcal{R}: 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4$

e) $z = -2x + y + 4; \mathcal{R}: -3 \leq x \leq 3; -4 \leq y \leq 4$

f) $z = y; \mathcal{R}: 1 \leq x \leq 5; -4 \leq y \leq 4$

g) $z = x^2; \mathcal{R}: -3 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4$

Para cada uno de los incisos se pide lo siguiente:

- Asigna cuatro valores a la variable y dentro del rango establecido y obtén las ecuaciones reducidas correspondientes.
- Grafica en un mismo plano xz las ecuaciones anteriores e identifica el tipo de curva que son.
- Despliega las gráficas anteriores en un sistema tridimensional agregando un eje y y colocando las curvas anteriores en su plano correspondiente.
- Grafica la ecuación original de tres variables, limitándote al rectángulo dado.
- Usa algún recurso computacional para que corrobore la gráfica que obtuviste.
- Repite todo lo anterior con la variable x .

2. La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones de tres variables corresponde a una superficie de revolución. Para cada una de ellas:

- Identifica el eje del giro y los planos donde están las circunferencias que se forman al girar.
- Obtén la ecuación de la curva que al girar origina la superficie de revolución.
- Haz un dibujo de la superficie graficando primero la curva que la genera y colocando algunas de las circunferencias en sus planos correspondientes.

a) $x^2 = y^2 + z^2$

b) $x = z^2 + y^2$

c) $x - 2 = z^2 + y^2$

d) $y + 2 = z^2 + x^2$

e) $x^2 + y^2 = z^2 + 9$

f) $x^2 + z^2 = y^2 + 9$

g) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

h) $x^2 + y^2 = z^2 - 9$

i) $z^2 + y^2 = x^2 - 4$

j) $x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 z$

3. Para las ecuaciones siguientes se pide que realices los pasos indicados en la guía del punto 4 de "Consideraciones alrededor de la SP-6" para graficarlas. Utiliza un recurso tecnológico para contrastar lo que obtuviste.

a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$

b) $y = x^2 - z^2$

c) $x^2 + 4y^2 = z$

d) $z = 4 + x + 2y$

e) $x + y = 4z + 2$

f) $x = 2z + 2y - 4$

g) $y = 4z + 2$

h) $2x - y + 3z = 6$

4. **Cilindros.** Una ecuación con dos variables puede pensarse como si fuera una de tres (imaginando, por ejemplo, un sumando con la variable faltante con coeficiente 0); esto significa que si se le dan valores a la variable faltante, las ecuaciones reducidas coinciden con la misma ecuación dada y, por lo tanto, las curvas asociadas a éstas son iguales (si se dibujan en un mismo plano). Si se despliegan todas estas curvas, se obtiene

una figura llamada **cilindro**. Para cada una de las siguientes ecuaciones, obtén primero la gráfica en el plano correspondiente; después obtén la gráfica en el sistema tridimensional.

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 + z^2 = 9$

c) $z = 2x + 1$

d) $z = y^2$

e) $z = \text{sen}(x)$

f) $y^2 - z^2 = 1$

g) $y = \cos(x)$

h) $z = e^x$

5. Coloca enseguida del número de cada gráfica la ecuación que le corresponde del siguiente listado:

$z = \text{sen}(x)$

$z = 9 - x^2 - y^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

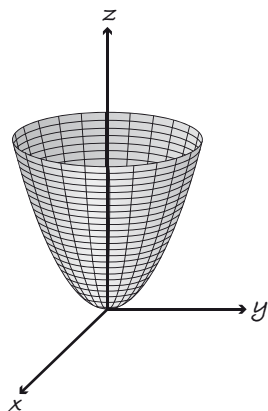
$z^2 = x^2 + y^2$

$z = x^2 + y^2 + 1$

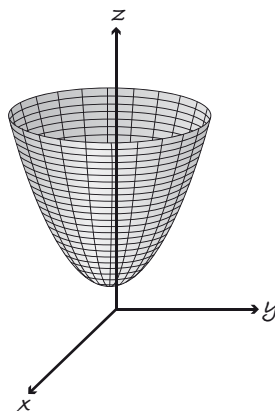
$z = 9 - y$

$x^2 + y^2 = 9$

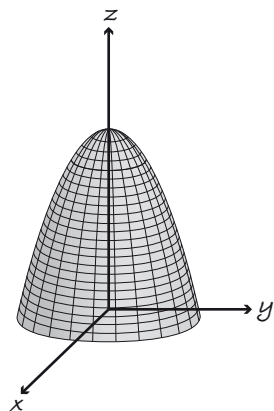
$z = x^2 + y^2$



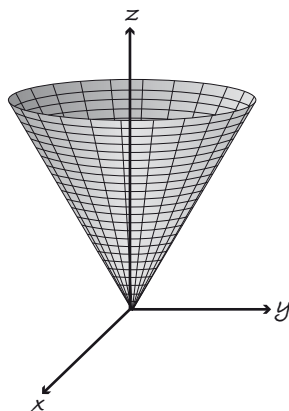
1. _____



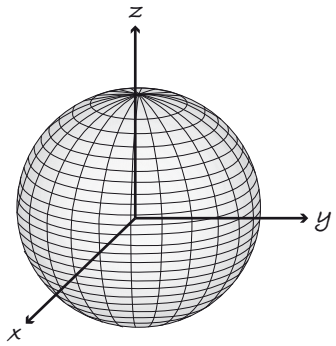
2. _____



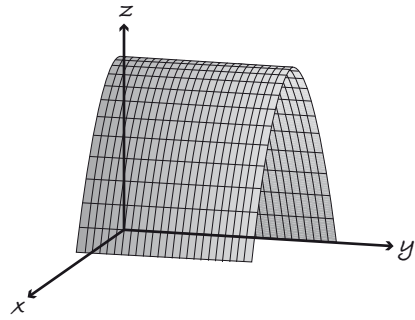
3. _____



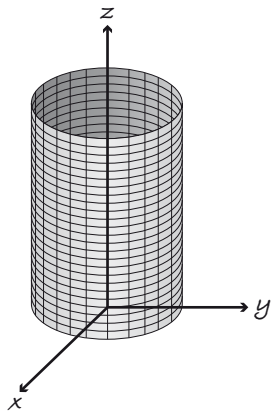
4. _____



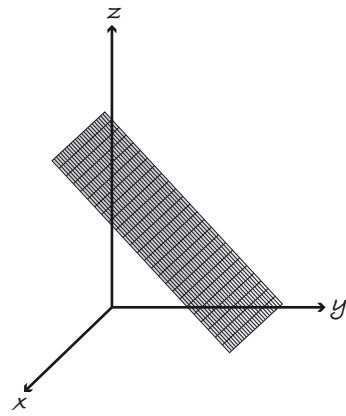
5. _____



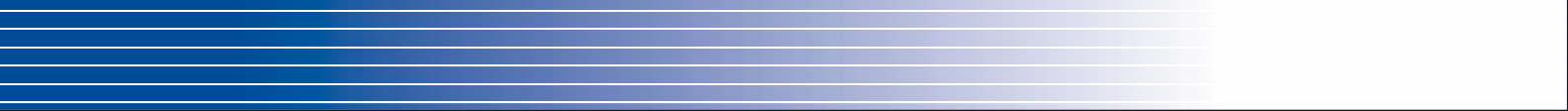
6. _____



7. _____



8. _____



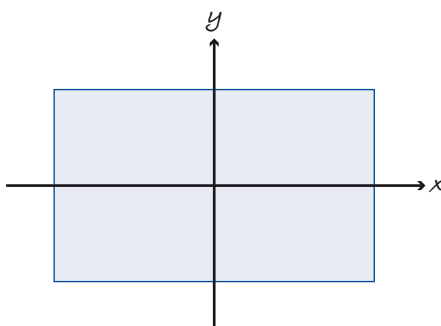
2.1

Derivadas parciales

Una idea fundamental del Cálculo es que las curvas pueden visualizarse como si estuvieran formadas por un sinnúmero de tramos infinitamente pequeños, que precisamente por su pequeñez infinita son rectos. Si la curva está representada en un sistema de coordenadas cartesianas por la ecuación $y = f(x)$, la visión anterior puede concretarse por medio de la ecuación $dy = f'(x)dx$, la cual nos indica que en un valor arbitrario de x el cambio infinitesimal en y es proporcional al cambio infinitesimal en x , propiedad que en la dimensión de lo finito identifica a los modelos lineales en x y y . De manera totalmente análoga, las superficies pueden visualizarse como si estuvieran formadas por un sinnúmero de parches infinitamente pequeños, que debido a su pequeñez infinita son planos. Si la superficie está representada en un sistema de coordenadas cartesianas por la ecuación $z = f(x, y)$, la visión anterior puede concretarse por medio de una ecuación de la forma $dz = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, la cual nos indica que para valores arbitrarios de x y y el cambio infinitesimal en z es aditivamente proporcional a los cambios infinitesimales en x y en y , propiedad que en la dimensión de lo finito caracteriza a los modelos lineales en x , y y z . Las funciones $A(x, y)$ y $B(x, y)$ juntas son el equivalente en una dimensión superior a la derivada $f'(x)$ del cálculo de funciones de una variable; a estas funciones las llamaremos **derivadas parciales** y son el objeto de estudio del presente tema.

Situación-Problema 7 (SP-7)

Supongamos que la temperatura en cada punto de una placa, donde se ha colocado un sistema de coordenadas xy , está dada por la fórmula: $T = T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, en grados centígrados.



Si se fija el valor de x , la temperatura estará solamente en función de y . Tiene sentido entonces hablar de la derivada de τ respecto a y ; esta derivada se denota así: $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ y se lee “la derivada parcial de τ respecto a y (el símbolo ∂ es una d torcida, la cual nos indica que, aunque estemos derivando τ respecto a y , no debemos olvidar que τ depende también de x)”.

1. Aplicando las reglas usuales para las derivadas de funciones de una variable, y suponiendo que x asume el papel de constante, obtén $\frac{\partial \tau}{\partial y}$.
2. Si ahora se fija y , la temperatura estará solamente en función de x .
 - a) ¿Qué notación usarías para designar la derivada de τ respecto a x ?
 - b) ¿Cómo se leería esta notación?
 - c) Obtén dicha derivada.
3. Si la fórmula de la temperatura es ahora $\tau = 100 - x^2y - 2xy - x - y^2$, calcula $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ y $\frac{\partial \tau}{\partial y}$.
4. Observa que las derivadas parciales vuelven, en general, a ser funciones de dos variables; si se quiere enfatizar esta manera de verlas se utiliza la siguiente notación:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tau}{\partial y}(x, y).$$

- a) Utiliza esta notación para las expresiones que obtuviste en el punto 3.
 - b) Calcula $\frac{\partial \tau}{\partial x}(1, 2)$, $\frac{\partial \tau}{\partial x}(-1, 1)$, $\frac{\partial \tau}{\partial y}(0, 2)$ y $\frac{\partial \tau}{\partial y}(2, 1)$ para la función temperatura del punto 3.
5. En relación con la temperatura, ¿qué significado tienen $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ y $\frac{\partial \tau}{\partial y}$?
 6. Si volvemos a la expresión de la temperatura del inicio de esta situación-problema: $\tau = 100 - x^2 - y^2$ contesta lo siguiente.
 - a) Calcula $\frac{\partial \tau}{\partial x}(1, 2)$
 - b) En relación con la temperatura, ¿qué significado concreto tiene el número que calculaste en el inciso a)?
 - c) En relación con la gráfica de la función de temperatura, ¿qué significado tiene el número que calculaste en el inciso a)?
 7. Responde todos los incisos del punto 6, pero ahora con $\frac{\partial \tau}{\partial y}(1, 2)$.

Discusión de la Situación-Problema 7

Iniciemos esta discusión puntualizando dos diferentes contextos en los que puede ubicarse el enunciado de esta situación-problema.

Contexto físico

La fórmula $\tau = \tau(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ es una regla que nos dice el valor de la temperatura (τ) en cada punto de la placa con coordenadas (x, y) . En otras palabras, esa fórmula da la distribución de temperaturas en una placa, donde se ha colocado un sistema de coordenadas cartesianas.

Contexto matemático

La fórmula $\tau = \tau(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, al margen de sus significados, puede pensarse como una **función (escalar) de dos variables**: el valor de τ está en función de los valores de x y de y . Si se asigna un valor para x y otro para y , la función asigna un único valor para τ ; para indicar esta correspondencia de valores se utiliza, precisamente, la notación $\tau(x, y)$.

También, esta fórmula puede verse como una **ecuación de tres variables** x , y y τ : $\tau = 100 - x^2 - y^2$.

Por supuesto que esta función de dos variables, o ecuación de tres variables, tiene una gráfica en el espacio tridimensional que proporciona una visión geométrica de la distribución de temperaturas en la placa.

Ahora bien, ¿qué sucede cuando se le da un valor fijo a una de las variables independientes, digamos, x ? La función de dos variables se convierte en una función de una sola, en este caso, de y . La ecuación de tres variables se convierte en una de dos, en este caso, de y y de τ .

La gráfica de la función de una sola variable (y , en este caso) o de la ecuación reducida de dos variables (y y τ) es una curva en un plano $y\tau$. Estas curvas, al ser desplegadas en el espacio tridimensional a lo largo del eje x , generan la gráfica de la función de dos variables, o la ecuación de tres.

En el contexto físico, esta función de una variable o ecuación reducida informa sobre la distribución de temperaturas en líneas de la placa paralelas al eje y , precisamente en aquellas líneas donde la coordenada x quedó fija. La gráfica de las curvas correspondientes proporciona una perspectiva geométrica de la distribución de temperaturas a lo largo de esas líneas en la placa.

En el enunciado se menciona que al fijar la variable x y quedar τ en función de y solamente, tiene sentido hablar de la derivada de τ respecto a y , y para indicar tal derivada y enfatizar que se ha hecho una reducción a una variable, de una función correspondiente a varias, se utiliza el símbolo $\frac{\partial \tau}{\partial y}$, y se lee así: “la derivada parcial de τ respecto a y ”.

El concepto de *derivada parcial* es crucial para profundizar en el estudio de fenómenos donde intervienen magnitudes que dependen de varias variables, como podrás apreciarlo a lo largo del libro. Por ahora, lo primero que queremos señalar es que obtener la derivada parcial de una función cuya fórmula se conoce, es tan sencillo como obtener las derivadas comunes y corrientes, como lo has hecho en tus cursos previos. Veámoslo en nuestro ejemplo:

Dada $\tau = \tau(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, se pide obtener $\frac{\partial \tau}{\partial y}$. En automático, al ver este símbolo se debe pensar que la función a derivar (τ) es como una función de una sola variable (la variable y , en este caso) y, por lo tanto, la otra variable de la que depende τ originalmente (x , en este caso) debe considerarse constante. Así, se tiene que $\frac{\partial \tau}{\partial y} = -2y$ (Nota: x es constante; esto no significa que se deba poner un valor específico a esta variable, pero si das valores específicos a x , digamos, 0, 1, 2, etc., identificarás que la derivada de lo que queda, respecto a y , corresponde con el valor que obtuvimos).

De manera similar, si ahora fijamos y (es decir, si la mantenemos constante), τ será función de x solamente y se puede hablar, por lo tanto, de la derivada parcial de τ respecto a x , cuya notación es $\frac{\partial \tau}{\partial x}$. Con la función específica de τ que tenemos, se obtiene que $\frac{\partial \tau}{\partial x} = -2x$.

Con lo anterior hemos respondido hasta ahora los puntos 1 y 2 de la SP-7.

En el punto 3 se da la función $\tau = 100 - x^2y - 2xy - x - y^2$ y se pide calcular las dos derivadas parciales: $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ y $\frac{\partial \tau}{\partial y}$. Para obtener la primera, consideramos y como constante y obtenemos $\frac{\partial \tau}{\partial x} = -2xy - 2y - 1$; para la segunda, x es ahora tomada como constante y se obtiene $\frac{\partial \tau}{\partial y} = -x^2 - 2x - 2y$.

Observemos que aquí usamos la regla de que la derivada de una función que está multiplicada por una constante es la constante por la derivada de la función.

Notemos que las derivadas parciales que hemos obtenido vuelven a ser funciones de dos variables, es decir, las derivadas parciales pueden tomar valores numéricos, dependiendo de los valores que se les dé a x y a y ; para enfatizar este hecho se escribe: $\frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y) = -2xy - 2y - 1$, $\frac{\partial \tau}{\partial y}(x, y) = -x^2 - 2x - 2y$.

En particular se tiene: $\frac{\partial \tau}{\partial x}(1, 2) = -9$, $\frac{\partial \tau}{\partial x}(-1, 1) = -1$, $\frac{\partial \tau}{\partial y}(0, 2) = -4$, $\frac{\partial \tau}{\partial y}(2, 1) = -10$.

En relación con el contexto físico de la temperatura y en consideración al punto 5 de la SP-7, ¿qué significado tienen $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ y $\frac{\partial \tau}{\partial y}$? Veamos.

$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y)$ indica la razón a la que cambia la temperatura en cada punto (x, y) de la placa cuando a partir del punto se avanza en las x sobre una línea paralela al eje x (línea correspondiente al valor fijo de y).

$\frac{\partial \tau}{\partial y}(x, y)$ indica la razón a la que cambia la temperatura en cada punto (x, y) de la placa cuando a partir del punto se avanza en las y sobre una línea paralela al eje y (línea correspondiente al valor fijo de x).

Si regresamos a la fórmula de la temperatura $\tau = \tau(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ se tiene que $\frac{\partial \tau}{\partial x}(1, 2) = -2$. Este resultado dice que la razón de cambio de la temperatura en $(1, 2)$, en la dirección del eje x , es -2 , pero, ¿qué significa esto en el contexto de la placa y la temperatura?

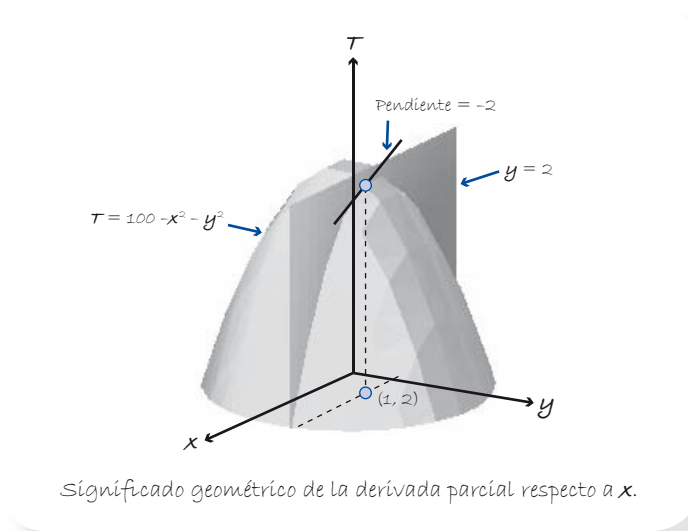
Significa que si esa razón de cambio se mantuviera y nos ubicamos en el punto de la placa con coordenadas $(1, 2)$, al avanzar sobre la línea paralela al eje x , con ecuación $y = 2$, la temperatura iría disminuyendo (por el signo “menos”) a una razón de 2 grados por cada unidad que se avance en x .

Gráficamente, el -2 indica la pendiente de una curva en un punto. ¿Qué curva y qué punto?

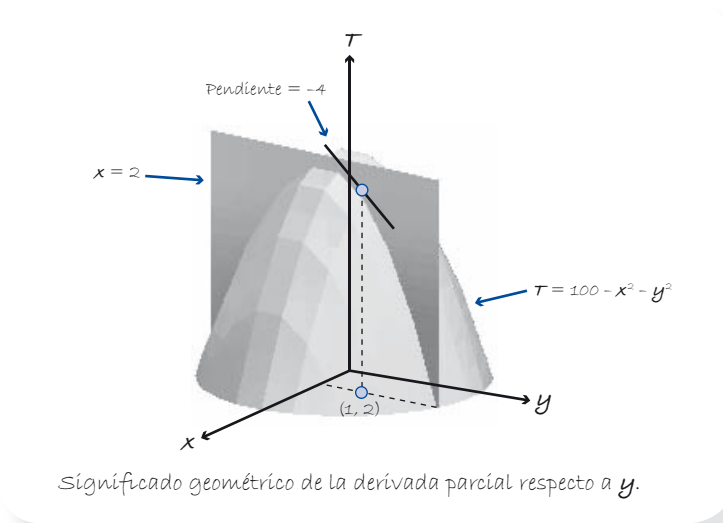
Curva: la gráfica de la ecuación reducida cuando se fija $y = 2$, o sea la gráfica de $\tau = 96 - x^2$, o curva de corte, que se forma al intersectar la superficie con ecuación: $\tau = 100 - x^2 - y^2$ con el plano correspondiente a $y = 2$.

Punto: con coordenada $x = 1$ en la recta con ecuación $y = 2$.

Ve la siguiente gráfica.



De manera similar, tenemos que $\frac{\partial T}{\partial y}(1, 2) = -4$ indica que la razón de cambio de la temperatura en $(1, 2)$, en la dirección del eje y , es -4 ; esto significa que si nos ubicamos en el punto de la placa con coordenadas $(1, 2)$ y la razón de cambio se mantuviera así, la temperatura decrecería a una razón de 4 grados por unidad que se avance en las y siguiendo la línea recta con ecuación $x = 1$. Geométricamente, el número -4 se interpreta como la pendiente de la curva de intersección (curva de corte) de la superficie con ecuación, $T = 100 - x^2 - y^2$ y el plano con ecuación $x = 1$, en el punto de la curva correspondiente a $y = 2$.



Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 7

1. Interpretación general de las derivadas parciales

En general, si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales son las razones de cambio de z respecto a x o y . Los valores que toman las derivadas parciales se interpretan geométricamente como pendientes de las curvas de corte de la superficie, que es la gráfica de la función de dos variables, con planos paralelos al plano xz (la parcial respecto a x) y al plano yz (la parcial respecto a y).

2. Interpretación de las derivadas parciales en contextos específicos

Las derivadas parciales pueden tener significados específicos concretos de acuerdo con lo que la función en cuestión esté modelando; revisaremos algunos contextos físicos que ya hemos estudiado en la primera unidad, en ellos interpretaremos el significado de las derivadas parciales correspondientes.

a) Cuerda vibrante.

En el Tema 3 de la Unidad 1 vimos que la función $z = f(x, t) = \cos(t/2) \operatorname{sen}(x)$ es un buen modelo para el movimiento de una cuerda vibrante. Recordemos algunos detalles relacionados con este modelo para asociar significados precisos a las correspondientes derivadas parciales en este contexto.

La variable x representa los puntos de la cuerda; cada punto de esta tiene un movimiento estrictamente vertical, excepto los puntos correspondientes a $x = 0$ y $x = \pi$, que son los extremos de la cuerda y quedan fijos.

La variable t representa el tiempo.

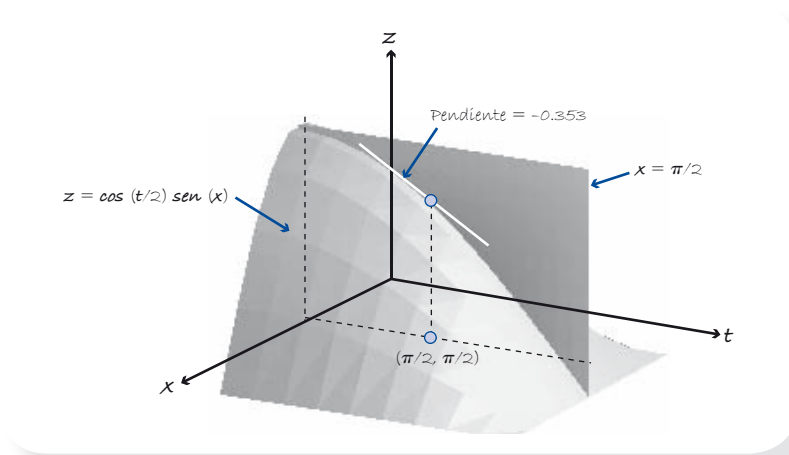
La variable z representa las alturas; de hecho, z representa la altura a la que está el punto x de la cuerda en el tiempo t .

Si se fija un valor de x , estamos fijando un punto de la cuerda; luego, al dejar correr el tiempo, es decir, al hacer variar t , la función $z = f(x, t) = \cos(t/2) \operatorname{sen}(x)$ es reducida a una de solo una variable (de t) que modela el movimiento (vertical) del punto x de la cuerda a lo largo del tiempo t . Así, podemos decir que $\frac{\partial z}{\partial t}$ o $\frac{\partial f}{\partial t}$ representa la razón con la que cambia la altura o posición de un punto de la cuerda respecto al tiempo. En otras palabras, esta derivada parcial significa la velocidad a la que se mueven los puntos de la cuerda.

Observemos que $\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(t/2) \operatorname{sen}(x)$; esto se obtiene al considerar x como constante (y, por lo tanto, $\operatorname{sen}(x)$), aplicando la derivada de un coseno y usando la regla de la cadena. En particular, si tomamos $x = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{\pi}{2}$ se tiene que $\frac{\partial z}{\partial t}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi/4) \operatorname{sen}(\pi/2) = -0.353$

El significado concreto de este número es que el punto $x = \frac{\pi}{2}$ de la cuerda (el de la mitad) cuando el tiempo es $t = \frac{\pi}{2}$ se desplaza a una velocidad de -0.353 unidades de longitud por unidad de tiempo; es decir, va hacia abajo a un ritmo de 0.353 unidades de longitud por unidad de tiempo.

Geoméricamente, $\frac{\partial z}{\partial t}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi/4) \operatorname{sen}(\pi/2) = -0.353$ indica que la pendiente de la curva de corte de la gráfica de la función $z = f(x, t)$ con el plano $x = \frac{\pi}{2}$, en $t = \frac{\pi}{2}$ es -0.353 . Esto se ilustra en la figura siguiente.



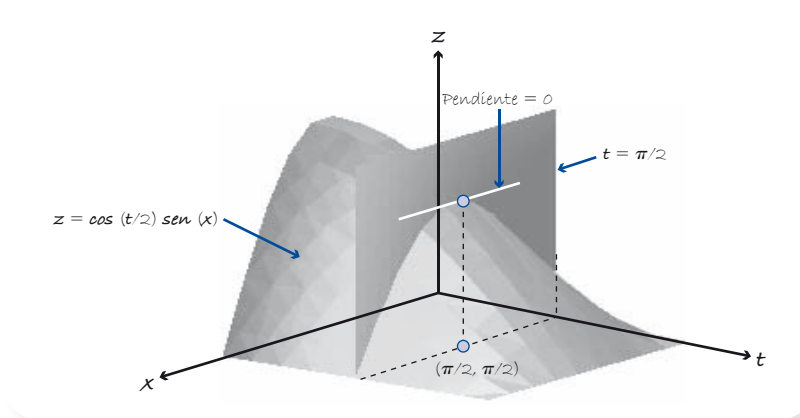
Si fijamos el tiempo, la función $z = f(x, t) = \cos(t/2) \operatorname{sen}(x)$ se convierte en una función de x solamente. Esta función reducida es una fórmula con la que se obtiene la posición de cada uno de los puntos de la cuerda, para ese tiempo fijo. Así, la derivada parcial de z respecto a x indica la razón con la que va cambiando la posición (altura) cuando se avanza con las x . Si reconocemos que la gráfica de la función reducida (en el plano xz , habiendo dejado fijo t) se identifica con la forma de la cuerda en ese tiempo fijo, $\frac{\partial z}{\partial x}$ indica cómo van cambiando las posiciones de los puntos de la cuerda a lo largo de la misma.

Mecánicamente: $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(t/2) \cos(x)$, lo cual se obtiene al considerar constante t (y, por lo tanto, $\cos(t/2)$).

En particular, si tomamos $x = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{\pi}{2}$ se tiene que

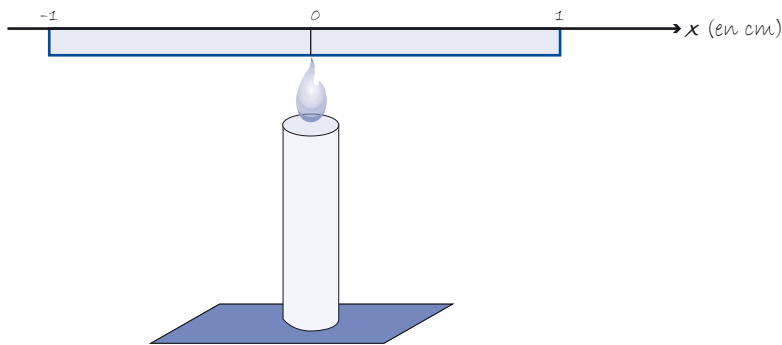
$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \cos(\pi/4) \cos(\pi/2) = 0.$$

Este resultado coincide con el hecho de que en ese momento el punto más alto de la cuerda es precisamente el correspondiente a $x = \frac{\pi}{2}$ (de hecho, puedes averiguar que en cualquier tiempo esta derivada parcial es 0 en $x = \frac{\pi}{2}$; y este resultado se corresponde con el hecho de que en un tiempo dado ese punto de la cuerda está siempre en la posición más alta o más baja respecto a los demás). Observa la siguiente figura.



b) Temperatura en una varilla de metal.

Se calienta una varilla delgada metálica, como se muestra en la siguiente figura.



A partir de cierto momento ($t = 0$) se retira la fuente de calor.

Supongamos que $\mathcal{T}(x, t) = 50e^{-x^2} \cos\left(\frac{t}{4}\right)$ modela la distribución de temperatura en cada punto x de la varilla y cada tiempo t , donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.

Al emplear las reglas usuales para derivar podemos ver que las derivadas parciales respecto a x y a t son, respectivamente:

$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} = -100xe^{-x^2} \cos\left(\frac{t}{4}\right)$ (habiendo dejado a t como constante y, por lo tanto, $\cos\left(\frac{t}{4}\right)$ también se considera así).

$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = -12.5e^{-x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{4}\right)$ (considerando a x como constante y, por lo tanto, a e^{-x^2}).

En este contexto físico, ¿qué significado tienen estas derivadas parciales? Veamos.

Cuando se mantiene fijo el tiempo, pensamos entonces en $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}$, la función de temperaturas modela la distribución de temperaturas a lo largo de la varilla en ese tiempo fijo; entonces, esta derivada parcial indica la razón con la que cambia la temperatura respecto al cambio de posición en la varilla.

En el caso de $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}$ lo que queda fijo es el valor de x , o sea, un punto de la varilla, y el tiempo transcurre; la función $\mathcal{T}(x, t)$ modela la distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en un solo punto, con coordenada x , de la varilla. Por lo tanto, esta derivada parcial significa el ritmo al que van cambiando las temperaturas en ese punto respecto al tiempo.

Tomemos en particular $x = 1/2$ y $t = \pi$; evaluemos las derivadas parciales en esta pareja de valores y escribamos el significado específico.

$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \pi\right) = -100\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -27.5306$. Este número indica que en el tiempo $t = \pi$ la temperatura disminuye a una razón de 27.5306 grados por cada

centímetro que se avance sobre los puntos de la varilla, a partir del punto $x = 1/2$ de ella. Esta razón es únicamente válida cuando se inicia el avance.

$\frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{1}{2}, \pi\right) = -12.5e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -6.8826$. Este número nos dice que en el punto $x = 1/2$ de la varilla la temperatura disminuye a un ritmo (instantáneo) de 6.8826 grados por segundo, en el tiempo $t = \pi$.

En el terreno geométrico, estos números corresponden a las pendientes de las curvas de corte de la gráfica de la función temperatura con los planos $t = \pi$ y $x = 1/2$, respectivamente.

3. Segundas derivadas parciales mixtas

Ya sabemos que las derivadas parciales de una función de dos variables son en general funciones de las mismas variables; tiene sentido volver a derivar parcialmente las derivadas parciales, así obtenemos lo que se llaman **derivadas parciales de orden superior** (digamos que cuando se deriva por primera vez, tenemos las primeras derivadas parciales, o de primer orden). Lo que queremos hacer notar en este punto es que cuando se deriva parcialmente respecto a una variable, digamos x , y el resultado se vuelve a derivar respecto a la otra variable, digamos y (obteniendo así lo que llamaremos **segunda derivada parcial mixta**); el resultado es el mismo si invirtiéramos el orden de derivación, es decir, primero derivando parcialmente respecto a y , y el resultado derivarlo de nuevo, pero ahora respecto a x .

Escribimos $\frac{\partial}{\partial x}(f)$ para denotar que se deriva parcialmente respecto a x la función f que está a la derecha, y esto se abrevia así: $\frac{\partial f}{\partial x}$. Entonces, para representar que se deriva parcialmente respecto a y a la derivada parcial de f respecto a x , escribimos $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(f)\right)$ y lo abreviamos de esta manera: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Con esta notación el resultado que anunciamos quedaría expresado así: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Verifiquemos este resultado con las dos funciones que hemos considerado en la SP-7.

$$T = 100 - x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -2x \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -2y \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0$$

$$T = 100 - x^2 y - 2xy - x - y^2.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -2xy - 2y - 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} = -2x - 2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -x^2 - 2x - 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = -2x - 2.$$



Para que se cumpla la igualdad de segundas derivadas parciales mixtas, es preciso que ambas funciones tengan la propiedad de ser continuas en los alrededores de cada punto donde la igualdad se da.

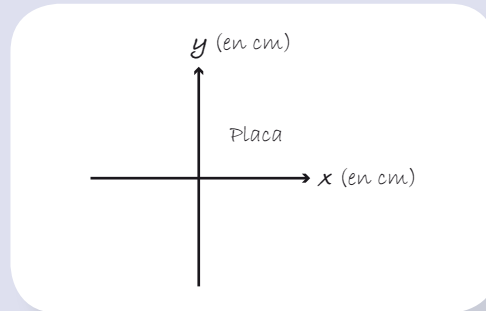
Ser **continua** significa que los valores de la función en dos puntos se puedan acercar tanto como se quiera con tal de que, a su vez, los puntos se acerquen uno al otro suficientemente.

1. Las siguientes son funciones de temperatura (en °C) en una placa:

a) $T = T(x, y) = 6 - 2x - 3y$

b) $T = T(x, y) = 6 \ln(9 + x^2 + y^2)$

c) $T = T(x, y) = \frac{6x}{x^2 y^4 + 1}$



Para cada una de ellas obtén:

- i) La razón a la que cambia la temperatura en la dirección del eje x en un punto (x, y) arbitrario.
- ii) La razón a la que cambia la temperatura en la dirección del eje x en el punto $(1, 2)$.
- iii) La razón a la que cambia la temperatura en la dirección del eje y en un punto (x, y) arbitrario.
- iv) La razón a la que cambia la temperatura en la dirección del eje y en el punto $(1, 2)$.

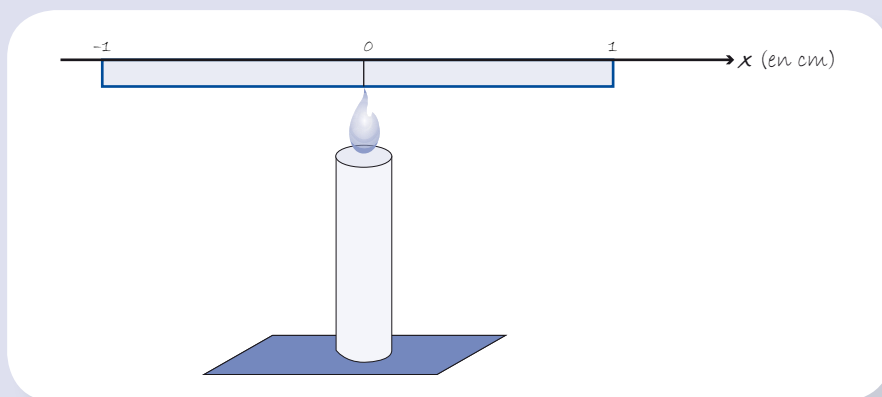
2. Considera a la superficie con ecuación: $z = f(x, y) = 100e^{-x-3y}$.

- a) Dibuja la porción de superficie correspondiente a la región $x \geq 0, y \geq 0$.
- b) Obtén la pendiente de la curva de corte de la superficie con el plano $y = 3$ en el punto de la curva donde $x = 1$.
- c) Obtén la pendiente de la curva de corte de la superficie con el plano $x = 1$ en el punto de la curva donde $y = 3$.

3. Una cuerda se fija a los extremos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ del plano xz ; se estira y luego se suelta de tal forma que cada punto de la cuerda tiene un movimiento estrictamente vertical, la altura z en el tiempo t del punto de la cuerda con abscisa x está dada por la ecuación $z = f(x, t) = \cos(t/2) \operatorname{sen}(x)$; $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t < \infty$.

- a) Si fijamos el tiempo en el valor $t = \pi/2$, ¿qué interpretación tiene la ecuación resultante $z = f(x, \pi/2)$? Grafica esta ecuación en el plano xz .
- b) Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(3\pi/4, \pi/2)$. ¿Qué interpretación tiene esta derivada en el contexto del movimiento de la cuerda?
- c) Si fijamos la posición de un punto de la cuerda en el valor $x = 3\pi/4$, ¿qué interpretación tiene la ecuación resultante $z = f(3\pi/4, t)$? Grafica esta ecuación en el plano tz .
- d) Calcula $\frac{\partial f}{\partial t}(3\pi/4, \pi/2)$. ¿Qué interpretación tiene esta derivada en el contexto del movimiento de la cuerda?

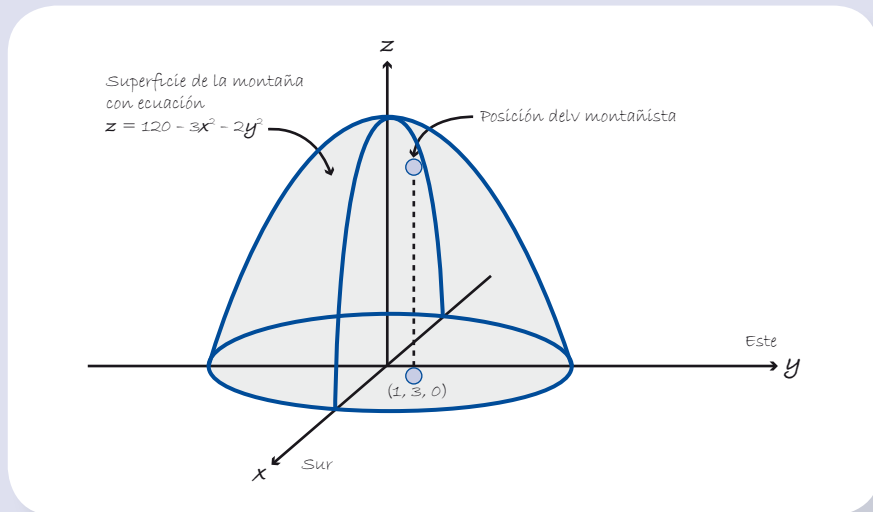
4. Se calienta una varilla delgada metálica como se muestra en la siguiente figura.



A partir de cierto momento se retira la fuente de calor.

Supongamos que $T(x, t) = 50e^{-x^2} \cos\left(\frac{t}{4}\right)$ modela la distribución de temperatura en cada punto x de la varilla y cada tiempo t , donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.

- ¿A qué razón cambia la temperatura T respecto a la posición x en el punto de la varilla, donde $x = 0$ y $t = 0$?
 - ¿A qué razón cambia la temperatura T respecto al tiempo t en el tiempo $t = \pi$, en el punto de la varilla donde $x = 0$?
5. Para cada una de las siguientes funciones en donde z depende de x y y , obtén las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, luego deriva respecto a y a $\frac{\partial z}{\partial x}$, y también respecto a x a $\frac{\partial z}{\partial y}$. Comprueba que en ambos casos se llega al mismo resultado.
- $z = f(x, y) = 4x^3 + 2xy^2 + 6y^5$
 - $z = f(x, y) = \cos(y/2) \operatorname{sen} x$
 - $z = f(x, y) = 50e^{-x^2} \cos(y/4)$
 - $z = f(x, y) = y/x$
 - $z = f(x, y) = e^{xy^2}$
 - $z = f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2y)$
6. La superficie de una montaña está modelada por la ecuación $z = f(x, y) = 120 - 3x^2 - 2y^2$, en donde z representa la altura de la montaña, la parte positiva del eje x apunta hacia el sur, la parte positiva del eje y apunta hacia el este, y el eje z es perpendicular a la Tierra; x , y y z están medidas en metros.



Un montañista se encuentra en el punto $(1, 3, 99)$ de la superficie montañosa.

- Si el montañista se dirigiera hacia el Sur, ¿estaría ascendiendo o descendiendo?
 - Si el montañista se dirigiera hacia el Este, ¿estaría ascendiendo o descendiendo?
7. La noción de derivada parcial se puede extender para considerar a funciones de tres o más variables, por ejemplo, en cierta región del espacio tridimensional, la función $\mathcal{T}(x, y, z, t)$ puede representar la temperatura del punto (x, y, z) del espacio en el tiempo t .

La derivada parcial de \mathcal{T} respecto a cualquiera de las variables x, y, z o t se obtiene considerando al resto de las variables (fijas, o constantes). Si $\mathcal{T}(x, y, z, t) = 4t^2(5xy + 3xy^2 + 6y^2z^3)$, calcula:

- $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}(1, 2, 3, 10)$
- $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}(1, 2, 3, 10)$
- $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z}(1, 2, 3, 10)$
- $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}(1, 2, 3, 10)$

Interpreta el significado físico de cada una de las cuatro derivadas parciales anteriores.

8. Un fluido atraviesa al plano xy de acuerdo con la ecuación de velocidad

$$\vec{v} = (2x^2 + 3xy + 5y^2) \vec{k}.$$

- Calcula la rapidez con la que el fluido atraviesa al plano xy en el punto $(1, 1)$ de este plano.
- Si a partir del punto $(1, 1)$ nos movemos en la dirección del eje x , ¿la rapidez del fluido crece o decrece?
- Si a partir del punto $(1, 1)$ nos movemos en la dirección del eje y , ¿la rapidez del fluido crece o decrece?
- A partir del punto $(1, 1)$, ¿cuál de las dos direcciones hay que tomar, la del eje x o la del eje y , para obtener mayor incremento en la rapidez del fluido?

2.2

Modelo lineal

El **trabajo** (o la **circulación**) es una de las dos nociones motoras cuyo estudio provoca en este libro la emergencia de conceptos, procesos y resultados del Cálculo (la otra noción motora es el **flujo**). El trabajo puede ser considerado como una medida de la acción potencial de una fuerza, que toma en cuenta la longitud de una trayectoria a lo largo del cual es aplicada, así como su magnitud en la dirección de esa trayectoria. El problema de realizar el cálculo de un trabajo nos conduce al establecimiento de la integral de línea, y el trabajo es también una noción indispensable al enunciar la ley de Ampere de la electricidad y el magnetismo. En este tema utilizaremos el concepto de trabajo como un medio para inducir a las funciones lineales de dos variables, lo cual resulta al considerar el trabajo que realiza un campo de fuerzas constante de un punto fijo a un punto arbitrario. Así, al mismo tiempo que hacemos surgir los modelos lineales (los más importantes en el estudio del Cálculo) nos vamos familiarizando con una de las nociones más importantes de la Física.

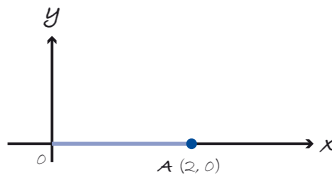
Situación-Problema 8 (SP-8)

1. Calcula el trabajo desarrollado por el campo de fuerzas \vec{F} dado, siguiendo la trayectoria que va de $O(0, 0)$ a $A(2, 0)$ en el eje x .

a) $\vec{F} = 3\vec{i}$

b) $\vec{F} = 4\vec{j}$

c) $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$



2. Calcula el trabajo desarrollado por cada una de las fuerzas anteriores, pero siguiendo ahora la trayectoria que va de $O(0, 0)$ a $A(x, 0)$ en el eje x .

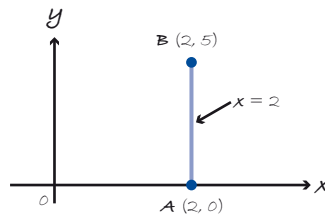


3. Calcula el trabajo desarrollado por el campo de fuerzas dado a lo largo de la trayectoria que va de $A(2, 0)$ a $B(2, 5)$ en la recta $x = 2$.

a) $\vec{F} = 3\vec{i}$

b) $\vec{F} = 4\vec{j}$

c) $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

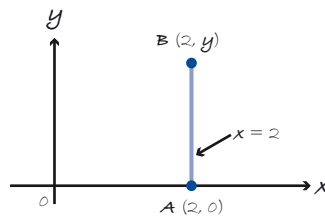


4. Calcula el trabajo desarrollado por el campo de fuerzas dado a lo largo de la trayectoria que va de $A(2, 0)$ a $B(2, y)$ en la recta $x = 2$.

a) $\vec{F} = 3\vec{i}$

b) $\vec{F} = 4\vec{j}$

c) $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$



5. Calcula el trabajo desarrollado de $O(0, 0)$ a $B(x, y)$ por el campo de fuerzas $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Observa que el trabajo obtenido depende de x y y , es decir, $W = \phi(x, y)$.
6. a) Calcula el trabajo desarrollado por el campo de fuerzas $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ para ir del punto $A(1, 2)$ al punto $B(2, 4)$, siguiendo la recta que los conecta.
- b) Compara el resultado del inciso anterior con la diferencia $\phi(B) - \phi(A)$, donde $\phi(x, y)$ es la función obtenida en el punto 5.

Discusión de la Situación-Problema 8

Es conveniente señalar que el concepto de trabajo involucra una **fuerza** (en realidad, un campo de fuerzas) y un **desplazamiento**; se dice entonces, por ejemplo, que se realiza un trabajo cuando una partícula se desplaza en un espacio donde actúa o se manifiesta una fuerza. A su vez, el desplazamiento involucra una trayectoria o curva (sobre la que se desplaza la partícula, por ejemplo) y una **dirección** del desplazamiento.

Es importante resaltar la particularidad del tipo de fuerzas y desplazamientos que están presentes en esta situación-problema: **fuerza constante** y **desplazamiento rectilíneo**. En el tercer tema de esta unidad construiremos una fórmula para calcular el trabajo en una situación general; utilizaremos para ello la estrategia de la toma del

elemento diferencial, en la cual se utilizará el procedimiento que desarrollemos aquí para este caso particular.

En el inciso *a*) del primer problema, $\vec{F} = 3\vec{i}$ y el desplazamiento (el mismo para los tres incisos) es sobre el eje x , de 0 a 2 (es decir, en dirección del eje x positivo), se tiene, como ya habrás notado, que el trabajo es $\mathcal{W} = 6$ (unidades de trabajo). Probablemente, para llegar a este resultado utilizaste la fórmula: Trabajo = fuerza \times distancia; en este caso, vale la pena aclarar que sería más preciso decir “magnitud de la fuerza \times distancia”, además de que *esta fórmula es cierta sólo en el caso en que la fuerza tenga la misma dirección que el desplazamiento y su magnitud sea constante*, lo cual en este inciso es cierto. Esta fórmula puede escribirse simbólicamente así:

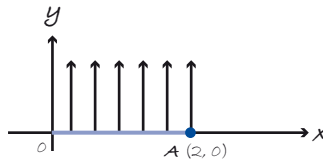
$$\mathcal{W} = |\vec{F}| \mathcal{D}$$

donde $|\vec{F}|$ es la magnitud de la fuerza \vec{F} y \mathcal{D} es la magnitud del desplazamiento.



Si la fuerza se mide en newtons, y el desplazamiento, en metros, el trabajo se mide en joules. Usaremos la letra \mathcal{W} (de la palabra *work*, “trabajo” en inglés) para designar al trabajo y reservaremos la letra \mathcal{T} (de trabajo) para el vector tangente unitario.

Observa ahora cómo en el inciso *b*) ya no se tienen las condiciones donde opera la fórmula anterior, ya que $\vec{F} = 4\vec{j}$ va en la dirección del eje y positivo, mientras que el desplazamiento se da siguiendo la dirección del eje x positivo.



En esta situación podemos aplicar la siguiente fórmula:

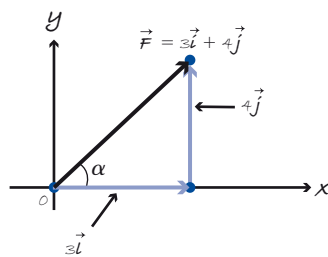
$$\mathcal{W} = |\vec{F}| \mathcal{D} \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre el vector fuerza y la dirección del desplazamiento. En el caso concreto que estamos analizando, observa que este ángulo es de 90° y, por lo tanto, $\cos \alpha = 0$, de ahí que

$$\mathcal{W} = 0.$$

Observa que en el caso en que el ángulo sea 0, es decir, que la fuerza va en la misma dirección que el desplazamiento, la fórmula $\mathcal{W} = |\vec{F}| \mathcal{D} \cos \alpha$, se reduce a $\mathcal{W} = |\vec{F}| \mathcal{D}$; en este sentido, se dice que esta última fórmula es un caso particular de la anterior.

Para resolver el inciso *c*), donde $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ y el desplazamiento es el mismo, utilizando la versión más general, se tiene que $|\vec{F}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$, $\mathcal{D} = 2$ y $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, como se puede apreciar en el siguiente dibujo.



Se tiene entonces que $\mathcal{W} = (5)(2)\left(\frac{3}{5}\right) = 6$.

Como habrás notado, este resultado coincide con lo que se encontró en el inciso a). Alrededor de este hecho podemos hacer las siguientes observaciones:

- La fuerza $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ puede verse como la suma de las dos fuerzas $\vec{F}_1 = 3\vec{i}$ y $\vec{F}_2 = 4\vec{j}$. Se sabe que el trabajo que se realiza considerando la fuerza \vec{F} es igual a la suma de los trabajos realizados considerando por separado \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

Esto concuerda con lo que obtuvimos en c), en donde el trabajo es igual a la suma de los resultados en a) y en b).

- De hecho, el resultado en c) es el mismo que el de a). Esto también puede leerse así: “La fuerza que produce el trabajo neto es \vec{F}_1 , ya que fuerzas, como \vec{F}_2 , que van perpendiculares al desplazamiento, no producen trabajo”. En otras palabras, la componente de la fuerza que contribuye al trabajo es la que va en la dirección del desplazamiento.

Trabajo y producto punto o escalar de vectores

La fórmula $\mathcal{W} = |\vec{F}| \mathcal{D} \cos \alpha$ puede reescribirse en término del producto punto, o escalar, entre vectores; esta forma de visualizar el trabajo resultará muy práctica y conveniente en muchas situaciones, como lo verás a lo largo del libro.

En general, si $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ y $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$, el producto punto es $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ (multiplicar componente a componente y sumar).

Lo interesante, y que se puede comprobar (ver Problema 10 de la Tarea 6), es que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos \alpha$.

Volvamos a la fórmula del trabajo $\mathcal{W} = |\vec{F}| \mathcal{D} \cos \alpha$; si construimos el vector desplazamiento \vec{D} cuya magnitud es la magnitud del desplazamiento (\mathcal{D}) y su dirección es la dirección del desplazamiento, tenemos que $\mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{D}$. Esto puede resultar muy práctico para el cálculo del trabajo cuando se tiene la fuerza y el desplazamiento escritos en términos de las componentes.

Volvamos a calcular el trabajo para los incisos anteriores con esta nueva forma de verlo.

Observemos que para todos estos incisos el vector desplazamiento es $\vec{D} = 2\vec{i}$.

$$a) \vec{F} = 3\vec{i} \Rightarrow \mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 0\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 0\vec{j}) = (3)(2) + (0)(0) = 6$$

$$b) \vec{F} = 4\vec{j} \Rightarrow \mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{D} = (0\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 0\vec{j}) = (0)(2) + (4)(0) = 0$$

$$c) \vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow \mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 0\vec{j}) = (3)(2) + (4)(0) = 6$$

Veamos ahora el problema 2 de la SP-8.

Se pide calcular el trabajo correspondiente a cada una de las fuerzas: a) $\vec{F} = 3\vec{i}$, b) $\vec{F} = 4\vec{j}$ y c) $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, pero ahora el desplazamiento es siguiendo la trayectoria que va de $O(0, 0)$ a $A(x, 0)$ sobre el eje x .

El vector desplazamiento es, en este caso, $\vec{D} = x\vec{i}$; entonces utilizando el producto punto, en términos de sus componentes, para calcular el trabajo, tenemos:

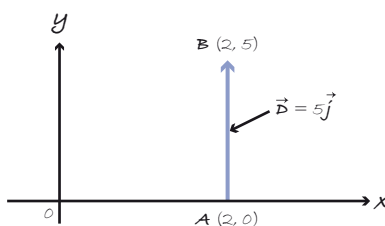
$$a) \vec{F} = 3\vec{i} \rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 0\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + 0\vec{j}) = (3)(x) + (0)(0) = 3x$$

$$b) \vec{F} = 4\vec{j} \rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (0\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + 0\vec{j}) = (0)(x) + (4)(0) = 0$$

$$c) \vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + 0\vec{j}) = (3)(x) + (4)(0) = 3x$$

En el problema 3 las fuerzas que aparecen en los incisos son las mismas que en los problemas anteriores: a) $\vec{F} = 3\vec{i}$, b) $\vec{F} = 4\vec{j}$ y c) $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, pero ahora el desplazamiento es sobre la trayectoria que va de $A(2, 0)$ a $B(2, 5)$ en la recta $x = 2$.

Observa que en este caso $\vec{D} = 5\vec{j}$.



Tenemos:

$$a) \vec{F} = 3\vec{i} \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 0\vec{j}) \cdot (0\vec{i} + 5\vec{j}) = (3)(0) + (0)(5) = 0$$

$$b) \vec{F} = 4\vec{j} \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (0\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (0\vec{i} + 5\vec{j}) = (0)(0) + (4)(5) = 20$$

$$c) \vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (0\vec{i} + 5\vec{j}) = (3)(0) + (4)(5) = 20$$

En el problema 4 sólo cambia el desplazamiento: sobre la trayectoria que va de $A(2, 0)$ a $B(2, y)$ por la recta $x = 2$; en este caso, $\vec{D} = y\vec{j}$; tenemos:

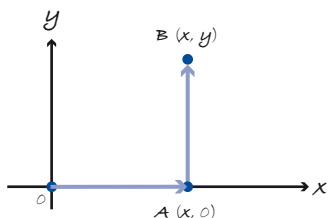
$$a) \vec{F} = 3\vec{i} \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 0\vec{j}) \cdot (0\vec{i} + y\vec{j}) = (3)(0) + (0)(y) = 0$$

$$b) \vec{F} = 4\vec{j} \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (0\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (0\vec{i} + y\vec{j}) = (0)(0) + (4)(y) = 4y$$

$$c) \vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (0\vec{i} + y\vec{j}) = (3)(0) + (4)(y) = 4y$$

Observa que en el problema 5 la fuerza es $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ y del desplazamiento sólo se dice que empieza en el origen $O(0, 0)$ y termina en el punto $B(x, y)$. Vamos a elegir, arbitrariamente, dos trayectorias que conecten estos dos puntos, y calcularemos el trabajo correspondiente; notaremos, en principio, que el trabajo es el mismo.

Trayectoria 1: Ir sobre el eje x desde $O(0, 0)$ al punto $A(x, 0)$; de aquí, ir sobre una línea vertical al punto $B(x, y)$.



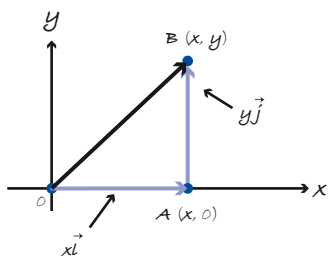
Para calcular el trabajo, podemos usar el hecho de que el trabajo a lo largo de todo el trayecto es la suma de los trabajos correspondientes a cada tramo de éste. Si representamos por \mathcal{W}_1 al trabajo a lo largo del primer tramo de la trayectoria, y por \mathcal{W}_2 , al del segundo, se tiene que

$$\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}; \vec{D} = x\vec{i} \rightarrow \mathcal{W}_1 = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + 0\vec{j}) = (3)(x) + (4)(0) = 3x$$

$$\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}; \vec{D} = y\vec{j} \rightarrow \mathcal{W}_2 = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (0\vec{i} + y\vec{j}) = (3)(0) + (4)(y) = 4y$$

Por lo tanto, si \mathcal{W} representa el trabajo a lo largo de toda esta trayectoria, tenemos que $\mathcal{W} = 3x + 4y$.

Trayectoria 2: Ir desde $O(0, 0)$ al punto $B(x, y)$ directamente a través de la recta que los conecta. Observa que el vector desplazamiento es en este caso $\vec{D} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



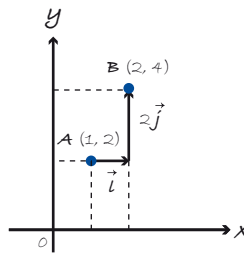
Tenemos entonces que el trabajo siguiendo esta trayectoria es

$$\mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = (3)(x) + (4)(y),$$

por lo tanto, $\mathcal{W} = 3x + 4y$.

Si consideramos la función de dos variables $\varphi(x, y) = 3x + 4y$, podemos decir que $\mathcal{W} = \varphi(x, y)$, por lo menos para estas dos trayectorias.

En el inciso *a*) del problema 6 se nos pide calcular el trabajo que se hace considerando la fuerza $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ y el desplazamiento que empieza en el punto $A(1, 2)$ y termina en $B(2, 4)$ siguiendo la recta que los conecta. En este caso $\vec{D} = \vec{i} + 2\vec{j}$.



Se tiene entonces que $W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j}) = (3)(1) + (4)(2) \Rightarrow W = 11$.

Finalmente, para el inciso b), tomemos $\varphi(x, y) = 3x + 4y$ y calculemos $\varphi(B) - \varphi(A)$: $\varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(2, 4) - \varphi(1, 2) = [3(2) + 4(4)] - [3(1) + 4(2)] = 22 - 11 = 11$. Como vemos, este resultado coincide con el valor obtenido para el trabajo en el inciso anterior.

Podemos adelantar que bajo ciertas condiciones, que estudiaremos en detalle, calcular el trabajo para ir de un punto inicial a uno final, independientemente de la trayectoria que se siga, es evaluar determinada función en el punto final y restar la evaluación en el inicial.

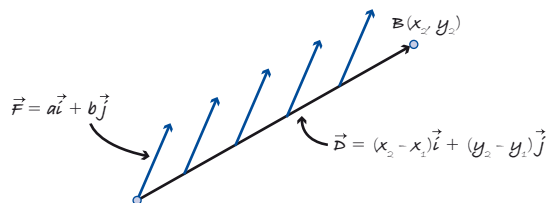
Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 8

1. Trabajo de un campo constante

El primer resultado por discutir aquí es que cuando el campo de fuerzas es constante, el trabajo que se realiza para ir de un punto a otro es independiente de la trayectoria elegida.

Un campo de fuerzas constante tiene la forma $\vec{F} = a\vec{i} + b\vec{j}$, donde a y b son constantes. Tomemos los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. Calculemos primero el trabajo para ir de A a B siguiendo la línea recta que los conecta. Después, deduciremos el trabajo siguiendo una curva arbitraria que conecte los puntos; notaremos que ambos cálculos coinciden.

- En línea recta.



Se tiene que $\vec{D} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$ y, por lo tanto:

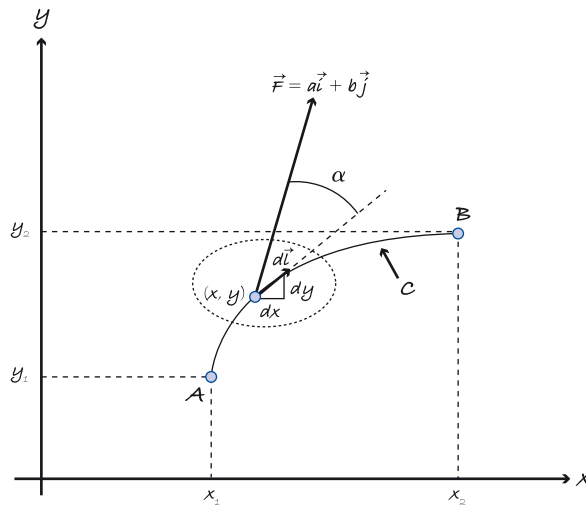
$$W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot ((x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}), \text{ o sea,}$$

$$W = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1). \quad (2.1)$$

- Tomando una curva arbitraria C .

Un detalle muy importante por destacar es que un desplazamiento sobre una trayectoria curva envuelve un movimiento que no necesariamente es rectilíneo; como consecuencia, no podemos utilizar directamente la fórmula del trabajo que hemos venido usando hasta ahora. Sin embargo, la *estrategia de la toma del elemento diferencial* nos permite encontrar una alternativa para el cálculo del trabajo.

Una curva puede considerarse formada por una infinidad de pedacitos rectos. Si tomamos uno de ellos y calculamos el trabajo a lo largo de él (la fuerza es constante ahí y el desplazamiento es en línea recta) con la fórmula que tenemos, conseguimos un diferencial de trabajo; sumando esos diferenciales o integrando, se tendrá el trabajo total que se pide. Considera el siguiente dibujo.



Tomemos un tramo infinitesimal de curva, que consideramos recto, sea $d\vec{l}$ el vector desplazamiento correspondiente a ese tramo. De la figura, se tiene que $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$. El diferencial de trabajo es $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = adx + bdy$, o sea:

$$dW = adx + bdy.$$

Si sumamos los diferenciales de trabajo de todos los tramos infinitesimales de la curva, se tendrá el trabajo total a lo largo de toda la trayectoria C . Esto se escribe $\int_C dW = W$, y el término de la izquierda se lee “integral de dW a lo largo de la curva C ”.

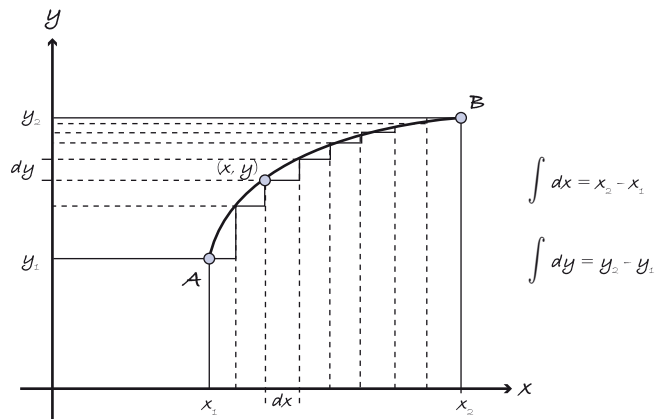
Tenemos entonces que

$$W = \int_C dW = \int_C adx + bdy = a \int_C dx + b \int_C dy. \quad (2.2)$$

Ahora, si observamos que la suma de los dx de todos los tramos infinitesimales en que dividimos la curva corresponde al desplazamiento total en el eje x que se tiene cuando se hace el recorrido a lo largo de C , empezando en $A(x_1, y_1)$ y terminando en $B(x_2, y_2)$, este desplazamiento total es $x_2 - x_1$. De modo similar,

sumando los dy a lo largo de la curva C empezando en $A(x_1, y_1)$ y terminando en $B(x_2, y_2)$, tenemos que el desplazamiento total es $y_2 - y_1$.

Es decir, $\int_C dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$ y $\int_C dy = \int_{y_1}^{y_2} dy = y_2 - y_1$.



Si sustituimos los valores de estas integrales en (2.2), tenemos que $W = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)$, lo cual es lo que teníamos en (2.1).

Tenemos entonces que para una fuerza constante el trabajo para ir de un punto a otro es independiente de la trayectoria que se siga.

2. Trabajo como función de dos variables

Apoyándonos en el resultado de la consideración (1) y tomando un punto fijo, digamos $A(x_0, y_0)$, el trabajo que se realiza para ir de A a un punto arbitrario $P(x, y)$ bajo la fuerza constante $\vec{F} = a\vec{i} + b\vec{j}$ no depende de la trayectoria que los conecta sino de las coordenadas (x, y) del punto P . Es decir, el trabajo es una función de dos variables. En esta consideración veremos cuál es la expresión para esta función, y en la siguiente estudiaremos algunas de sus características.

Si denotamos por $\varphi(x, y)$ el trabajo para ir de $A(x_0, y_0)$ a $P(x, y)$, se tiene:

$$\varphi(x, y) = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot ((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}), \text{ o sea,}$$

$\varphi(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0)$. Desarrollando los productos se tiene:

$$\varphi(x, y) = ax + by + c, \text{ donde } c = -ax_0 - by_0 \text{ es una constante.}$$

Notemos que, aunque esta función da el trabajo de $A(x_0, y_0)$ a $P(x, y)$, el trabajo para ir de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a otro punto $P_2(x_2, y_2)$ se puede obtener con la diferencia de valores de esta función en el punto final ($P_2(x_2, y_2)$) menos en el punto inicial ($P_1(x_1, y_1)$), es decir:

$$W = \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1). \text{ Ve el problema 3 de la Tarea 6.}$$

3. Funciones lineales

Al margen de contextos, una función del estilo $z = f(x, y) = ax + by + c$, donde a , b y c son constantes (que surge al considerar el trabajo de un campo constante), se llama **función lineal** (de dos variables). En este punto detallaremos algunas carac-

terísticas de estas funciones y señalaremos algunas relaciones que guardan con las funciones lineales de una sola variable.

a) *Derivadas parciales de las funciones lineales son funciones constantes.* En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = b.$$

De hecho, esta propiedad caracteriza a las funciones lineales, es decir, sólo las funciones lineales cumplen que ambas derivadas parciales sean constantes.

Veamos un ejemplo: se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3$.

Ahora planteemos la siguiente cuestión: ¿qué función f de dos variables cumple que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3$?

Es claro que la función $z = f(x, y) = 2x + 3y$ cumple lo planteado, pero no es la única; por ejemplo, $z = f(x, y) = 2x + 3y + 6$ también lo satisface. Digamos que la expresión de la función que cumpla lo que se pide debe necesariamente contener el término $2x + 3y$ y ningún otro término que contenga a las variables, pero puede tener agregada cualquier constante ya que la derivada parcial de una constante es 0. Es decir, hay toda una familia de funciones que satisfacen $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3$. Esta familia se escribe así: $z = f(x, y) = 2x + 3y + c$.

La constante puede determinarse estableciendo un valor que se quiera deba tener la función en un punto específico. Por ejemplo, si se pide que $f(0, 0) = 8$, se llega a la función $z = f(x, y) = 2x + 3y + 8$, que es “igual a $z = f(x, y) = 2x + 3y$ ”, salvo la constante.

En el caso de funciones de una sola variable, las funciones lineales se caracterizan por ser aquellas cuya derivada es una constante. Las funciones cuya derivada es una constante, digamos a , forman la familia $y = f(x) = ax + c$, donde el valor de c puede especificarse si se pide que la función tome un valor específico en un punto determinado.

b) *Gráfica de una función lineal de dos variables es un plano.* Se puede decir en general que para $z = ax + by + c$, fijar valores de x produce una familia de rectas con pendiente b en el plano yz ; estas rectas pueden desplegarse en el espacio a lo largo del eje x como se indicó en el Tema 4 de la Unidad 1. De modo similar, si los valores fijados son de y , entonces se tienen rectas con pendiente a en el plano xz , que pueden desplegarse en el espacio a lo largo del eje y . La única forma posible de que las líneas de corte que se despliegan tanto a lo largo del eje x como a lo largo del eje y sean rectas es que la superficie correspondiente sea un plano.

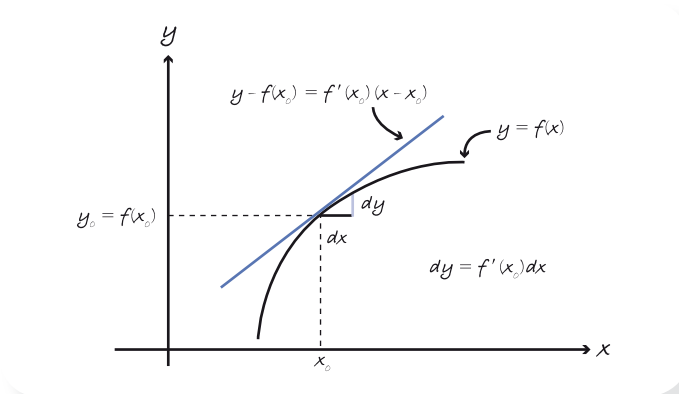
Digamos que los planos son la “extensión” de las rectas al espacio tridimensional. Las rectas son las gráficas de funciones lineales de una variable; los planos son las gráficas de las funciones lineales de dos variables.

4. Plano tangente a una superficie

Así como una curva puede visualizarse formada por una infinidad de tramos rectos infinitamente pequeños, una superficie puede pensarse formada por una infinidad de pedacitos planos infinitamente pequeños. La recta tangente a la curva en un punto es la recta que coincide con la curva en un tramo infinitamente pequeño que contiene a dicho punto. El plano tangente a la superficie en un punto de ella es el plano que coincide con la superficie en un pedacito infinitamente pequeño que contiene a dicho punto. Ahora construiremos la ecuación del plano tangente a la gráfica de una función

de dos variables auxiliándonos con la manera en que se construye la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función de una variable en un punto.

Sea $y = f(x)$ una función, x_0 un valor en el eje x y $y_0 = f(x_0)$. Tomemos un tramo recto infinitamente pequeño de la curva que contenga al punto (x_0, y_0) , la recta que contiene ese tramo infinitamente pequeño es la recta tangente a la curva en el punto, y su pendiente es necesariamente la derivada de la función en x_0 , es decir, $f'(x_0)$.



La ecuación de la recta tangente puede construirse de dos formas distintas, que será conveniente conocer.

- Si consideramos la recta tangente como la gráfica de una función, entonces esta función es necesariamente lineal y su derivada es constante. Como ya se sabe que en un punto la derivada es $f'(x_0)$, la función debe cumplir la ecuación (diferencial) $y' = f'(x_0)$, entonces la función debe ser $y = f'(x_0)x + c$, donde c puede ajustarse por la condición de que la recta debe pasar por (x_0, y_0) . Se tiene entonces que $c = y_0 - f'(x_0)x_0$; por lo que la ecuación de la recta tangente es

$$y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0. \quad (2.3)$$

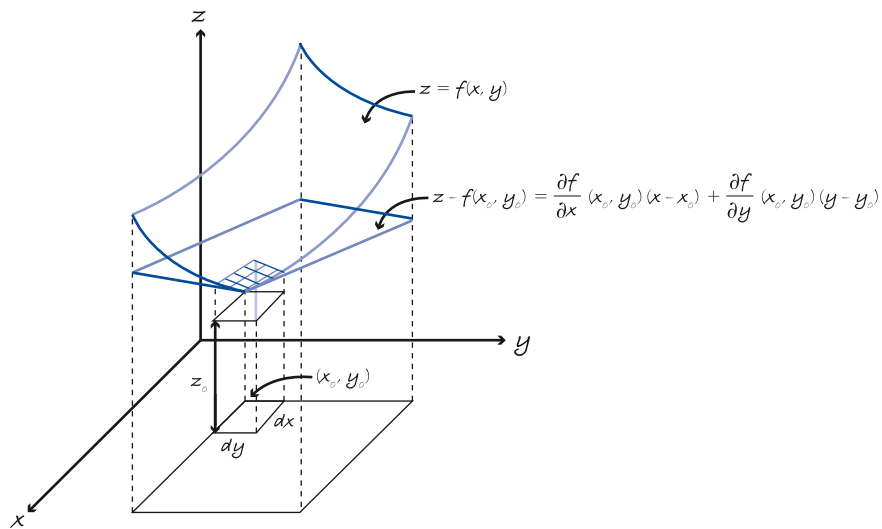
- Si simplemente tomamos la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_0 = m(x - x_0)$ en nuestro caso, entonces $m = f'(x_0)$ y, por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.4)$$

Puedes manipular algebraicamente cualquiera de las dos expresiones, (2.3) y (2.4), para llegar a la otra (te invitamos a hacerlo).

De manera similar podemos proceder para obtener la ecuación del plano tangente a una superficie. Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, tomemos un punto (x_0, y_0) del plano xy y supongamos que $z_0 = f(x_0, y_0)$; es decir, el punto con coordenadas (x_0, y_0, z_0) está en la superficie correspondiente a la gráfica de la función. Tomemos un pedacito plano infinitamente pequeño de la superficie alrededor del punto (x_0, y_0, z_0) ; como el plano tangente a la superficie en ese punto es el que contiene a este pedacito infinitesimal de la superficie, este plano debe contener las rectas tangentes a las curvas de corte de la superficie con los planos $x = x_0$ y $y = y_0$ en el punto (x_0, y_0, z_0) . De hecho, estas rectas tangentes son las curvas de corte del plano tangente con esos dos mismos planos.

$$x = x_0 \text{ y } y = y_0.$$



La pequeña porción cuadriculada (infinitesimal) es común a la superficie y a su plano tangente.

Como las pendientes de las rectas tangentes a las curvas de corte son las derivadas parciales de la función evaluadas en el punto del plano (x_0, y_0) , digamos $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, entonces la ecuación del plano tangente puede obtenerse de las siguientes dos maneras:

- a) La ecuación debe ser $z = ax + by + c$ para alguna constante c , con la finalidad de que sus derivadas parciales (que deben ser constantes) coincidan con las pendientes de dos de sus rectas (las de corte). El valor de c se ajusta para que el plano pase por (x_0, y_0, z_0) , es decir, para que se cumpla $z_0 = ax_0 + by_0 + c$; de aquí que $c = z_0 - ax_0 - by_0$. Por lo tanto, la ecuación del plano tangente es $z = ax + by + z_0 - ax_0 - by_0$.

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ y } b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- b) Manipulando algebraicamente la ecuación anterior podemos establecer la ecuación del plano tangente directamente como

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad (a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$$

$$\text{y} \quad (b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$$

Esta forma se corresponde con la de punto-pendiente de la recta tangente.

Ejemplo. Consideremos la función $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. Construiremos la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función correspondiente a cada uno de los puntos del plano xy indicados. Para cada punto, haremos un dibujo de la superficie con su plano tangente.

Punto $A(1, 2)$

En este caso se tiene que $x_0 = 1, y_0 = 2$ y evaluando en la función $z_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 2) = 4$; las derivadas parciales de la función son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y,$$

y evaluadas en el punto $A(1, 2)$ se tiene:

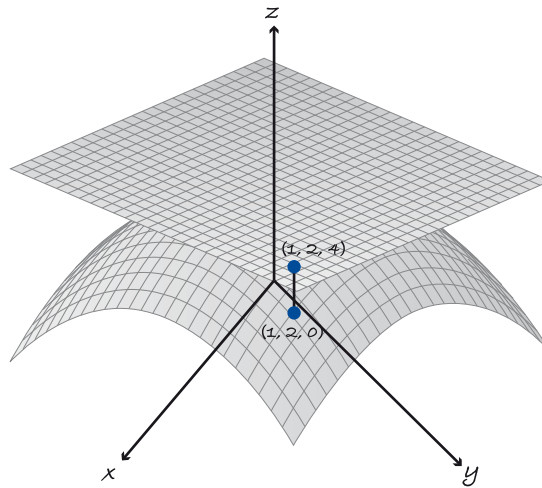
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -4.$$

Entonces la ecuación del plano tangente debe ser de la forma $z = -2x - 4y + c$ (considerando la primera forma de calcular la ecuación del plano).

El valor de la constante c se obtiene considerando que $z_0 = 4$ cuando $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$; es decir, $4 = -2(1) - 4(2) + c$ y, por lo tanto, $c = 14$. Finalmente, la ecuación del plano tangente es $z = -2x - 4y + 14$.

Si empleamos la segunda forma para calcular la ecuación del plano tangente, tenemos $z - 4 = -2(x - 1) - 4(y - 2)$.

Por supuesto, de ésta se puede llegar a la primera realizando los productos y simplificando. Enseguida mostramos la gráfica de la función y el plano tangente.



Plano tangente a la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 2, 4)$ de la superficie.

Punto $B(0, 2)$

En este caso tenemos que: $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $z_0 = f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 5$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y;$$

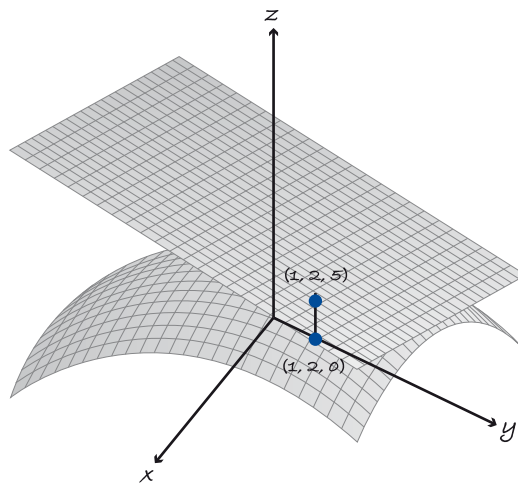
$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 2) = 0 \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 2) = -4.$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente es

$$z - 5 = 0(x - 0) - 4(y - 2) \rightarrow z - 5 = -4(y - 2).$$

O bien, $z = -4y + 13$.

Presentamos el dibujo de la superficie y el plano tangente.



Plano tangente a la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ en el punto $(0, 2, 5)$ de la superficie.

Punto $C(0, 0)$

En este caso tenemos que: $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = f(x_0, y_0) = f(0, 0) = 9$;

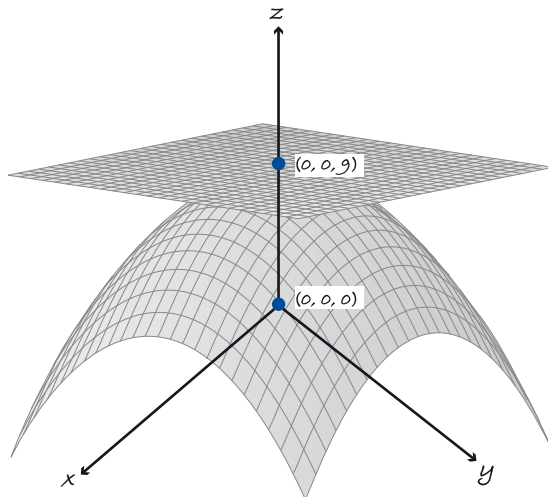
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y;$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente es

$$z - 9 = 0(x - 0) + 0(y - 0), \text{ o bien, } z = 9.$$

A continuación mostramos la gráfica de la superficie y este plano.



Plano tangente a la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ en el punto $(0, 0, 9)$ de la superficie.

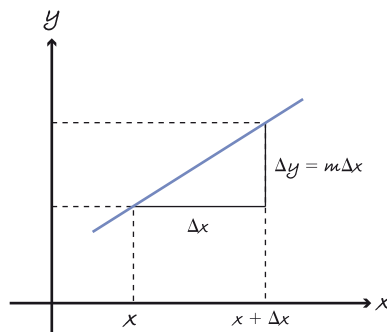
Conviene notar que en un punto de una superficie con ecuación $z = f(x, y)$ en donde el valor de z alcance un valor máximo relativo, es decir, el valor mayor considerando los puntos alrededor, como lo es en este caso, las derivadas parciales de la función se anulan; lo mismo sucede cuando en un punto el valor de z alcanza un valor mínimo relativo.

5. Diferencial (o diferencial total) de una función de dos variables

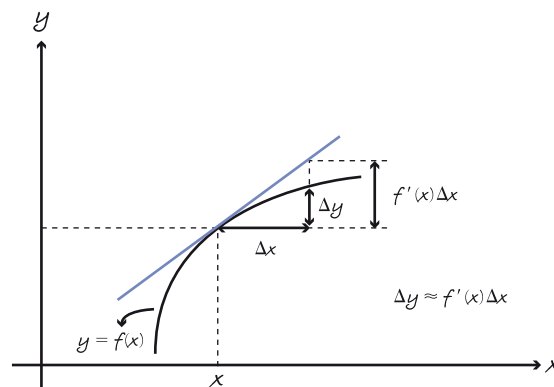
En este punto revisaremos primero algunas fórmulas, entre ellas la del diferencial para funciones de una variable; la idea es que a través de una analogía arribemos a la fórmula del diferencial para funciones de dos variables.

Si $y = f(x)$ es una función, la diferencia $f(x_1) - f(x_0)$ corresponde al cambio o incremento del valor de la función cuando la x pasa de x_0 a x_1 y se denota por Δy , es decir, $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$.

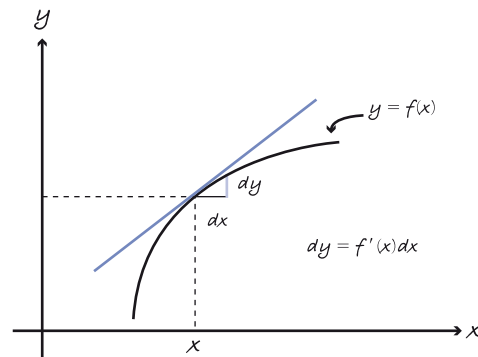
Para el caso de una función lineal, digamos que $y = f(x) = mx + b$, se tiene que $\Delta y = \Delta x$ simplemente por lo que se entiende de la pendiente $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\right)$. Esto dice que para el caso lineal, la diferencia (incremento o cambio) en los valores de la función es el producto de la pendiente por la diferencia de valores en x .



Cuando la función $y = f(x)$ no es lineal, el incremento de la función cuando cambiamos de x a $x + \Delta x$ puede aproximarse de la siguiente forma: $\Delta y \approx f'(x) \Delta x$ (precisamente pensando que la recta tangente se “parece” a la gráfica de la función en las cercanías del punto en cuestión).



Si consideramos incrementos infinitesimales, los diferenciales, la recta tangente coincide con la gráfica de la función en un tramo infinitesimal. Llevando lo que conocemos de lo lineal a lo infinitamente pequeño, se tiene entonces que el diferencial de la función $dy = f(x + dx) - f(x)$ (la diferencia de valores de la función entre un valor de x y uno infinitamente próximo a él, $x + dx$) es $dy = f'(x)dx$, y asociado a esto tenemos el llamado **triángulo característico**.



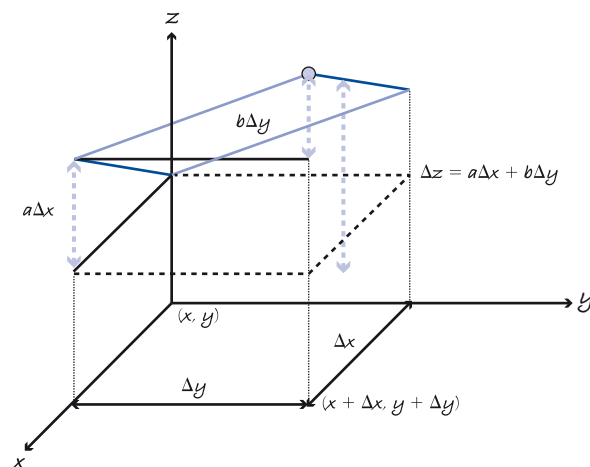
Pasemos al caso de funciones de dos variables y tomemos el caso de una función lineal, para empezar.

Una función lineal de dos variables tiene una expresión del estilo

$$z = f(x, y) = ax + by + c.$$

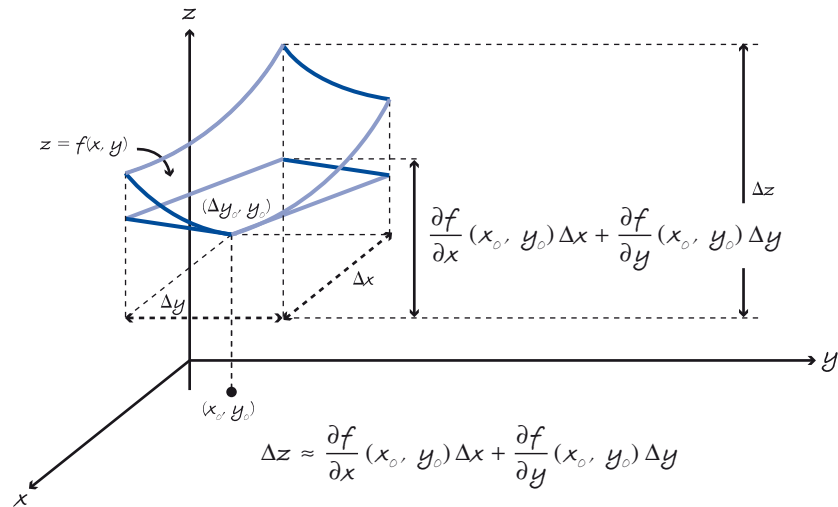
Si z_0 y z_1 son los valores de la función en los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ del plano xy , respectivamente, se tiene que $z_0 = f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$, y $z_1 = f(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c$; restando la primera de la segunda, se tiene: $z_1 - z_0 = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)$; esto dice que la diferencia de valores de la función o incremento en z es la suma de los incrementos de las correspondientes funciones lineales reducidas (de una variable) cuando la x pasa de x_0 a x_1 y la y pasa de y_0 a y_1 .

En términos de incrementos: $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$. En el siguiente dibujo se puede apreciar una construcción geométrica de esta fórmula.



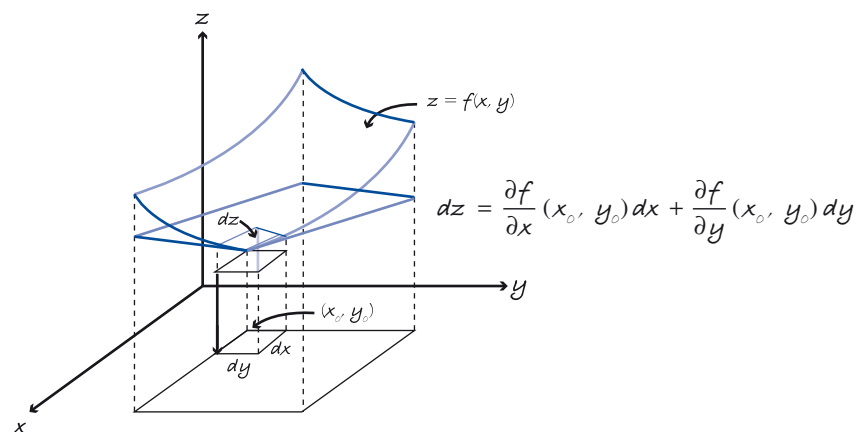
Los incrementos están señalados con las flechas punteadas.

Cuando la función $z = f(x, y)$ no es lineal, la diferencia o incremento de la función cuando se pasa del punto $P_0(x_0, y_0)$ al $P_1(x_1, y_1)$ puede aproximarse a través de la expresión: $\Delta z \approx a\Delta x + b\Delta y$, donde $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ (precisamente pensando que el plano tangente “se parece” a la gráfica de la función en las cercanías del punto en cuestión).



Si consideramos incrementos infinitesimales, los diferenciales, entonces el plano tangente coincide con la gráfica de la función en un área infinitamente pequeña. Llevando lo que conocemos de lo lineal para funciones de dos variables, a lo infinitamente pequeña, se tiene entonces la fórmula (del siguiente párrafo) para la diferencia de valores de z , correspondiente a dos puntos del plano que están infinitamente cercanos, $dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$.

$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$, y se le llama **diferencial** (o diferencial total) de la función $z = f(x, y)$. El siguiente dibujo ilustra un prisma asociado a esta fórmula, al cual llamaremos **prisma característico**, y es, digamos, una extensión del triángulo característico.



Ejemplo. Obtendremos la expresión del diferencial de las funciones a) $z = f(x, y) = 2x + 3y$ y b) $z = f(x, y) = x^2 e^{2y}$.

Solución.

a) Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3$, se tiene que $dz = 2dx + 3dy$.

b) Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{2y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 e^{2y}$, se tiene que $dz = 2xe^{2y}dx + 2x^2 e^{2y}dy$.

6. Gradiente de una función de dos variables

Si el diferencial de una función de dos variables extiende el concepto de diferencial para funciones de una variable, el gradiente es una extensión de la derivada. Al igual que derivadas con diferenciales, en el caso de funciones de una variable notaremos una relación estrecha entre gradientes y diferenciales de funciones de dos variables. Ambos conceptos son fundamentales para organizar estudios profundos de diversos fenómenos de la Física, como podrás apreciarlo en este libro.

Dada una función de dos variables $z = f(x, y)$, el gradiente de la función, que se denota por $\nabla f(x, y)$, es el campo vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de la función, es decir, $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j}$.

A veces, cuando no es necesario especificar que puede ser evaluado en los puntos (x, y) , el gradiente se denota simplemente así: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$.

Como ejemplo, veamos cuál es el gradiente de las funciones que aparecen en el punto anterior: a) $z = f(x, y) = 2x + 3y$ y b) $z = f(x, y) = x^2 e^{2y}$

$$z = f(x, y) = 2x + 3y \rightarrow \nabla f(x, y) = 2\vec{i} + 3\vec{j}.$$

$$z = f(x, y) = x^2 e^{2y} \rightarrow \nabla f(x, y) = 2xe^{2y}\vec{i} + 2x^2 e^{2y}\vec{j}.$$

7. Gradientes y diferenciales

La igualdad $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ pone de manifiesto la estrecha relación que existe entre el gradiente y el diferencial de una función $z = f(x, y)$, lo cual se expresa como

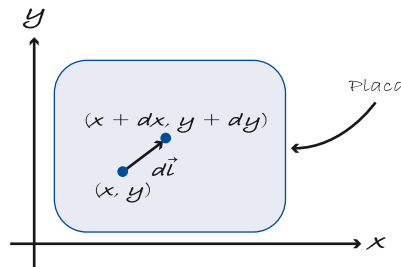
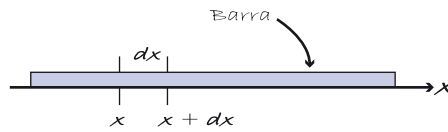
$$dz = \nabla f \cdot d\vec{l}; \quad (2.5)$$

donde $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ es el vector de desplazamiento infinitesimal ya visto en el punto 1 de estas consideraciones alrededor de la SP-8.

Recordemos que para funciones de una variable la expresión $dy = f'(x) dx$ nos dice que “El incremento infinitesimal de la función correspondiente al incremento infinitesimal en x es la derivada por el incremento en x ”. La expresión (2.5) nos indica que el incremento infinitesimal de la función (ahora de dos variables) correspondiente a un cambio de posición infinitesimal de un punto en el plano es la “derivada” (gradiente) “por” (producto punto) el “desplazamiento infinitesimal de la posición”. En este sentido, decimos que el gradiente de una función es la “derivada” de la función.

En el cuadro comparativo de abajo ponemos en correspondencia los nuevos elementos asociados a funciones de dos variables con los elementos ya conocidos de funciones de

una variable. Para ayudarnos en la interpretación de dichos elementos, pensemos que la función $T = f(x)$ representa la temperatura en cada punto x de una barra y , a su vez, que la función $T = f(x, y)$ representa la temperatura en cada punto (x, y) de una placa, como se muestra en la siguiente figura.



Función temperatura $T = f(x)$	Función temperatura $T = F(x, y)$
Desplazamiento infinitesimal en la barra dx	Desplazamiento infinitesimal en la placa $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$
Cambio infinitesimal de temperatura $dT = f(x + dx) - f(x)$ $dT = f'(x) dx$	Cambio infinitesimal de temperatura $dT = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$ $dT = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$ $dT = \nabla f(x, y) \cdot d\vec{l}$
Derivada $f'(x)$	Derivada $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j}$
La función temperatura puede obtenerse a partir de su derivada $f'(x)$ mediante el proceso de antiderivación	La función temperatura puede obtenerse a partir de sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ mediante un proceso de antiderivación, como se verá en el siguiente tema.

8. Campo gradiente, diferencial exacto y función potencia

Dado que el gradiente de una función de dos variables es un campo vectorial, tiene sentido preguntarse si un campo dado es el gradiente o no de alguna función. Saber esto de un campo revelará importantes características de los fenómenos físicos que modelan, como veremos más adelante. Si un campo vectorial es el gradiente de una función, decimos que el campo es un **campo gradiente**, y una función de dos variables cuyo gradiente es el campo se llama **función potencial** del campo. Siguiendo la analogía con el cálculo de una variable, una función potencial se corresponde con una antiderivada: una función potencial de un campo es aquella cuyo gradiente (“derivada”) es el campo.

Dado que el diferencial de una función de dos variables es una expresión de la forma $A(x, y) dx + B(x, y) dy$, tiene sentido preguntarse si una expresión de esa forma, llamada **forma diferencial**, es el diferencial o no de una función de dos variables. Saber esto de una forma diferencial servirá, por ejemplo, para visualizar la solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales, como veremos más adelante. Si una forma diferencial es el diferencial de una función, se dice que es un **diferencial exacto**.

Observemos la estrecha relación entre campo gradiente y diferencial exacto. Si el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$ es un campo gradiente, entonces la forma diferencial $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ es un diferencial exacto, y viceversa.

Veamos: si $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$ es un campo gradiente, entonces existe una función, la función potencia $z = f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = A(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = B(x, y)$, y así, por la definición de diferencial, se tiene que $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = A(x, y)dx + B(x, y)dy$. Es decir, la forma diferencial $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ es un diferencial exacto, o sea, la forma diferencial es exactamente el diferencial de la función potencial. De modo similar, si $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ es un diferencial exacto, entonces existe $z = f(x, y)$ tal que $dz = A(x, y) dx + B(x, y) dy$, de donde $\frac{\partial f}{\partial x} = A(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = B(x, y)$. Por lo tanto, $z = f(x, y)$ es la función potencial del campo gradiente $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$.

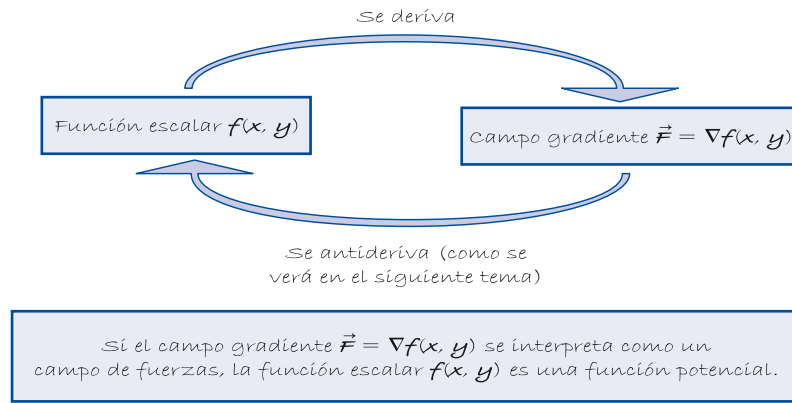
Tomemos, por ejemplo, el campo $\vec{F}(x, y) = (y + 3x^2e^{y^2})\vec{i} + (x + 2yx^3e^{y^2})\vec{j}$ y la correspondiente forma diferencial $(y + 3x^2e^{y^2})dx + (x + 2yx^3e^{y^2})dy$; nos preguntamos si ese campo es un campo gradiente o si la forma diferencial es exacta y, de ser así, cuál es la función potencial.

De existir la función potencial (y, por lo tanto, el campo sería gradiente, y la forma diferencial, exacta) esta debería ser, por lo pronto, una función tal que su derivada parcial respecto a x sea $y + 3x^2e^{y^2}$. A reserva de una manera más sistemática de proceder que desarrollaremos más adelante, “a simple vista” podemos ver que la función $z = f(x, y) = xy + x^3e^{y^2}$ cumple ese requerimiento; de hecho, también cumple que su derivada parcial respecto a y sea $x + 2yx^3e^{y^2}$. Es decir, el campo es un campo gradiente y la forma diferencial es exacta. La función potencial es precisamente la función $z = f(x, y) = xy + x^3e^{y^2}$.

Hay que hacer notar también que no todo campo es un campo gradiente, lo cual equivale a decir que no toda forma diferencial es un diferencial exacto. De hecho, esto es cierto aun en casos tan simples como el campo $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ o la forma diferencial

$-ydx + xdy$. Te invitamos a comprobar que este campo no es un campo gradiente ni, por supuesto, la forma diferencial es un diferencial exacto. En la última parte de esta unidad desarrollaremos un criterio para saber si un campo es o no un campo gradiente.

A continuación se muestra un esquema que muestra la relación entre un campo gradiente y su función potencial correspondiente.

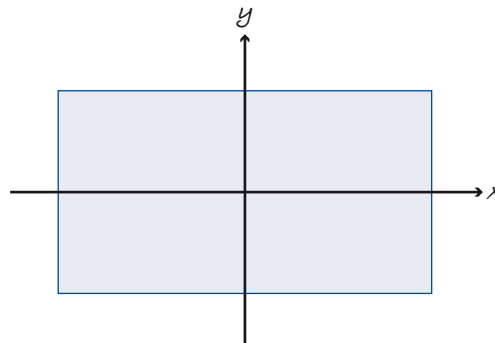


9. Situación-Problema 9

En este último punto queremos presentar la siguiente situación-problema; con ella deseamos que revise algunos procedimientos u objetos matemáticos construidos en los puntos anteriores.

Situación-Problema 9 (SP-9)

Supongamos que la temperatura en cada punto de una placa, donde se ha colocado un sistema de coordenadas xy , está dada por la fórmula $T = T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, en grados centígrados.



1. a) Obtén las derivadas parciales de la función temperatura: $\frac{\partial T}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y)$.
- b) Obtén el vector gradiente de la función temperatura: $\nabla T(x, y)$.
- c) Obtén el diferencial total de la función temperatura: dT .

2. a) Calcula la temperatura en el punto $(2, 5)$ de la placa: $\mathcal{T}(2, 5)$.
 b) Calcula $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}(2, 5)$ y $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}(2, 5)$.
 c) Obtén la ecuación del plano tangente a la superficie $\mathcal{T} = 100 - x^2 - y^2$ en el punto de la superficie donde $x = 2$ y $y = 5$.
3. Consideremos ahora un campo de fuerzas cuya ecuación es $\vec{F} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$.
 a) Obtén la función potencial $\varphi(x, y)$ de este campo de fuerzas.
 b) ¿Cuál es la función potencial $\varphi(x, y)$ del campo tal que $\varphi(2, 5) = 50$?
 c) ¿Cuál es la función potencial $\varphi(x, y)$ del campo tal que $\varphi(2, 5) = 71$?

Discusión de la Situación-Problema 9

En el punto 1 se da la función temperatura $\mathcal{T} = \mathcal{T}(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, entonces sus derivadas parciales son $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} = -2x$ y $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} = -2y$. Como el gradiente de \mathcal{T} está dado por la fórmula $\nabla \mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} \vec{j}$, se tiene que para esta función específica $\nabla \mathcal{T} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$.

El diferencial total de la función \mathcal{T} está dado en general por la fórmula $d\mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} dy$, entonces para la función temperatura dada tenemos $d\mathcal{T} = -2x dx - 2y dy$.

Hemos respondido así a los incisos a), b) y c) del punto 1.

Para el punto 2 se tiene:

- a) $\mathcal{T}(2, 5) = 71$ grados centígrados
- b) $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}(2, 5) = -4$ y $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}(2, 5) = -10$
- c) Para la ecuación del plano tangente usamos la siguiente forma de la ecuación: $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$, donde $x_0 = 2$, $y_0 = 5$, $z_0 = 71$, $a = -4$ y $b = -10$. Luego, la ecuación del plano tangente es $z - 71 = -4(x - 2) - 10(y - 5)$, que equivale a escribirla así: $z = -4x - 10y + 129$.

En el punto 3 se tiene el campo de fuerzas $\vec{F} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$.

En el inciso a) se pide la función potencial de este campo; ésta es la función cuyo gradiente es \vec{F} ; por inspección se puede ver que la función potencial es $\varphi(x, y) = -x^2 - y^2 + c$.

Observemos que en realidad lo que se ha obtenido es una familia de funciones que se diferencian por el valor que tome la constante. Esta constante puede calcularse cuando se agrega la condición de que la función asigne un valor determinado a un punto del plano. Por ejemplo, en el inciso b) la condición de que $\varphi(2, 5) = 50$, obliga a que $c = 79$, lo cual se obtiene de la ecuación $\varphi(2, 5) = -(2)^2 - (5)^2 + c = 50$, que a su vez resulta de sustituir los valores correspondientes en la función potencial. Entonces, la función potencial del campo $\vec{F} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$, y que cumple que $\varphi(2, 5) = 50$ es $\varphi(x, y) = -x^2 - y^2 + 79$.

Finalmente, para el inciso c) la condición de que $\varphi(2, 5) = 71$ obliga a que $c = 100$, y por lo tanto, la función potencial es $\varphi(x, y) = -x^2 - y^2 + 100$.

- Considera el campo de fuerzas $\vec{F} = 5\vec{i} + 9\vec{j}$.
 - Calcula el trabajo desarrollado por el campo desde el punto $(1, 2)$ hasta el punto $(5, 2)$ a lo largo de la recta $y = 2$.
 - Calcula el trabajo desarrollado por el campo desde el punto $(5, 2)$ hasta el punto $(5, 7)$ a lo largo de la recta $x = 5$.
 - Calcula el trabajo desarrollado por el campo desde el punto $(1, 2)$ hasta el punto $(5, 7)$ siguiendo la trayectoria horizontal que va de $(1, 2)$ a $(5, 2)$, y luego la trayectoria vertical que va de $(5, 2)$ a $(5, 7)$.
 - Calcula el trabajo desarrollado por el campo desde el punto $(1, 2)$ hasta el punto $(5, 7)$ siguiendo la trayectoria en línea recta que une a los puntos.
- Considera el campo de fuerzas $\vec{F} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.
 - Calcula el trabajo desarrollado por el campo desde el punto $(1, 9)$ al punto $(9, 1)$.
 - Obtén la forma general de su función potencial $\varphi(x, y)$.
 - Usa la función potencial para obtener el trabajo del inciso a).
 - Obtén la función potencial $\varphi(x, y)$ que cumple la condición $\varphi(1, 2) = -4$.
- Obtén el vector gradiente de cada función de dos variables $z = f(x, y)$.
 - $z = f(x, y) = 8x - 6y + 2$
 - $z = f(x, y) = 4x^2 - 3x + 7y^2 + 6y - 1$
 - $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 4)$
 - $z = f(x, y) = xe^{4y} + ye^{-x^2}$
- Si $T(x, y)$ es la función de temperatura en los puntos de una placa donde se ha instalado un sistema de coordenadas xy , el diferencial de temperatura dT en un punto (x, y) de la placa se define por la fórmula $dT = T(x + dx, y + dy) - T(x, y)$.
 - Expresa con tus palabras el significado físico del diferencial de temperatura: dT .
 - Desarrolla la fórmula del diferencial de temperatura, dT , en el caso $T(x, y) = 4x^2 + 3xy - 2y^2$, y simplifica el resultado eliminando los diferenciales de orden 2.
 - Tal y como se estableció en este tema, el diferencial de temperatura está dado de manera general por la fórmula $dT = \frac{\partial T}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial T}{\partial y}(x, y)dy$. Obtén el diferencial de temperatura para cada una de las siguientes funciones:
 - $T(x, y) = 8x - 6y + 2$
 - $T(x, y) = 4x^2 - 3x + 7y^2 + 6y - 1$
 - $T(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 4)$
 - $T(x, y) = xe^{4y} + ye^{-x^2}$
- Planos tangentes.

Obtén la ecuación del plano tangente a la superficie indicada en el punto dado; haz un esbozo de la gráfica de la superficie y el plano tangente.

 - $z = 9 - x^2 - y^2$; $P(x = 2, y = 1)$

b) $z = 9 - x^2 - y^2; \mathcal{P}(x=0, y=0)$

c) $z = x^2 + y; \mathcal{P}(x=0, y=3)$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 9; \mathcal{P}(1, 2, 2)$

e) $x^2 + z^2 = 18; \mathcal{P}(3, 5, 3)$

f) $z = yx^2; \mathcal{P}(x=2, y=1)$

g) $x^2 + z^2 = y^2 + 5; \mathcal{P}(0, 2, 3)$

6. El diferencial total y las reglas de derivación.

a) Considera la función $z = h(x, y) = f(x) + g(y)$, verifica que en este caso el diferencial total dz esté dado por la fórmula $dz = f'(x) dx + g'(y) dy$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar una suma de funciones de una variable. Esto implica que cada vez que nos demos cuenta de que el diferencial total de una variable z está dado por esta fórmula, podemos fácilmente reconstruir la expresión para z .

b) Considera la función $z = h(x, y) = g(y) + f(x)$, verifica que en este caso el diferencial total dz esté dado por la fórmula $dz = g(y) f'(x) dx + f(x) g'(y) dy$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar un producto de funciones de una variable. Esto implica que cada vez que nos demos cuenta de que el diferencial total de una variable z está dado por esta fórmula, podemos fácilmente reconstruir la expresión para z .

c) Considera a la función $z = h(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$, verifica que en este caso el diferencial total dz esté dado por la fórmula $dz = \frac{g(y)f'(x)dx - f(x)g'(y)dy}{[g(y)]^2}$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar un cociente de funciones de una variable. Esto implica que cada vez que nos demos cuenta de que el diferencial total de una variable z está dado por esta fórmula, podemos fácilmente reconstruir la expresión para z .

d) En cada caso obtén la fórmula para la variable z a partir de su diferencial total dz .

i) $dz = 2x^5 dx + 4e^{xy} dy$

ii) $dz = \text{sen}(x) dx + \frac{5}{y} dy$

iii) $dz = 6x^5 \text{sen}(y) dx + x^6 \cos(y) dy$

iv) $dz = e^x y^2 dx + 3e^x y^2 dy$

v) $dz = \frac{e^x y^4 dx - 4e^x y^3 dy}{y^8}$

vi) $dz = \frac{\cos(x) \ln(y) dx - \frac{\text{sen}(x)}{y} dy}{[\ln(y)]^2}$

7. Extensión a funciones de tres variables.

a) Calcula el trabajo que desarrolla el campo constante $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(4, 5, 6)$ siguiendo la trayectoria en línea recta que une los puntos.

b) Calcula el trabajo que desarrolla el campo constante $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto (x, y, z) siguiendo la trayectoria en línea recta que une los puntos.

c) ¿Cuál podría ser la función potencial del campo de fuerzas constante $\vec{F} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$?

d) ¿Cuál sería la función lineal de tres variables?

8. Extensión a funciones de tres variables.

Al igual que las funciones de una y dos variables, una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ puede hacerse lineal, esto es, tener asociada a su gráfica, que sería una hipersuperficie, un hiperplano tangente en un punto específico de ella, hiperplano que comparte con la hipersuperficie un hiperpedacito infinitesimal que contiene al punto.

- ¿Qué fórmula puedes ofrecer para el diferencial total dw de la variable w , es decir, para la expresión $dw = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z)$?
- Aplica la fórmula que ofreciste en el inciso anterior para calcular el diferencial total dw si $w = f(x, y, z) = x^4 \ln(y) + e^z \cos(y)$.
- Obtén la ecuación del hiperplano tangente a la gráfica de la ecuación $w = f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$ en el punto donde $x = 1, y = 2, z = 3$.
- Si $dw = 2x dx - y^2 dy + e^z dz$, obtén la función $w = f(x, y, z)$.

9. En este libro se usan las dos fórmulas para el producto punto de dos vectores, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \alpha$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, donde $\vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$, $\vec{B} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}$, y α es el ángulo entre los vectores. La equivalencia entre estas dos expresiones se basa en la ley de los cosenos y las propiedades del producto punto entre vectores.

Consulta en algún libro o alguna página de internet cuál es la ley de los cosenos y la prueba de que las dos fórmulas usadas para el producto punto son equivalentes.

2.3

Función potencial y teorema fundamental de las integrales de línea

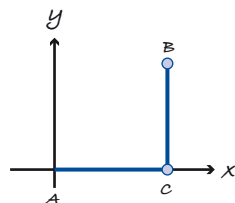
En el Tema 2 de esta unidad nos quedó claro que el trabajo realizado de un punto a otro del plano por un campo de fuerzas constante no depende de la trayectoria para ir de uno a otro; esta relevante propiedad de los campos de fuerzas constantes se extiende a una clase más amplia de campos, entre los que se encuentran los campos de fuerzas más importantes de la naturaleza: los gravitacionales y los eléctricos. A los campos con esta propiedad se les llama **campos conservativos**.

En este tema caracterizaremos a los campos de fuerzas con la propiedad mencionada; veremos que estos campos tienen una correspondiente función potencial, y que se obtienen a partir de ella calculando el vector gradiente de la función, restando la operación de derivación llevada a cabo con funciones de una variable. Es en este sentido que la función potencial asemeja ser una especie de antiderivada para este tipo de campos, la similitud se extiende para considerar al teorema fundamental de las integrales de línea, que explica cómo calcular el trabajo que realiza un campo de este tipo de un punto inicial a otro final mediante la diferencia de valores en ambos puntos de la correspondiente función potencial.

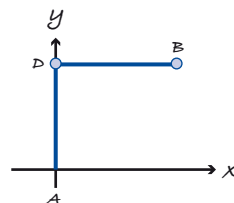
Como complemento se detalla en este tema la analogía que existe entre campos conservativos y diferenciales exactos (o totales), lo que nos da la perspectiva para comprender, desde la óptica de las funciones de dos variables, cómo se procede para resolver las ecuaciones diferenciales exactas.

Situación-Problema 10 (SP-10)

- Considera que $\vec{F}(x, y) = x^2 y \vec{i} + y \vec{j}$ es un campo de fuerzas y calcula el trabajo para ir del punto $A(0, 0)$ al punto $B(1, 1)$ siguiendo estas cuatro trayectorias:
 - Por el eje x hasta el punto $C(1, 0)$ y luego por la vertical hasta llegar a B .
 - Por el eje y hasta el punto $D(0, 1)$ y luego por la horizontal hasta llegar a B .

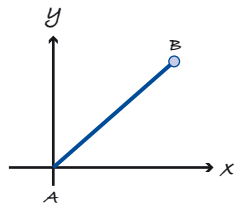


Trayectoria de a)

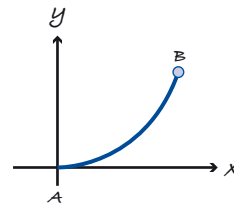


Trayectoria de b)

- c) Directamente de \mathcal{A} a \mathcal{B} por la recta $y = x$.
 d) Directamente de \mathcal{A} a \mathcal{B} por la curva $y = x^2$.



Trayectoria de c)



Trayectoria de d)

2. Considera que $\vec{F}(x, y) = 3x^2y^2\vec{i} + 2x^3y\vec{j}$ es un campo de fuerzas y calcula el trabajo para las mismas trayectorias del punto 1.
 3. ¿Observas alguna diferencia entre los resultados del punto 1 y 2?

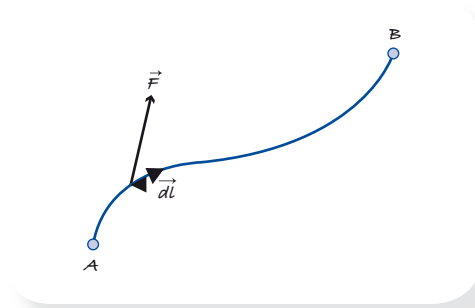
Discusión de la Situación-Problema 10

Una observación muy importante es que para calcular el trabajo con las condiciones dadas en esta situación-problema no podemos usar la fórmula de las situaciones anteriores. En efecto, la fórmula $\mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{D}$ se utiliza sólo cuando la fuerza es constante y la trayectoria es rectilínea. Habrás notado que en este caso las fuerzas dependen de los valores que tomen x y y ; además, tenemos que la trayectoria del inciso d) no es recta. Enseguida construiremos una fórmula para el trabajo que contempla una fuerza no precisamente constante y una trayectoria no necesariamente recta, que nos permitirá dar solución a la SP-10.

Construcción de la fórmula general para calcular el trabajo a lo largo de una curva

Consideremos una fuerza \vec{F} (no precisamente constante) y un desplazamiento que empieza en el punto \mathcal{A} y termina en el punto \mathcal{B} a lo largo de la curva \mathcal{C} (no necesariamente una recta). Aunque la fórmula $\mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{D}$ no puede utilizarse en el cálculo del trabajo para ir desde \mathcal{A} hasta \mathcal{B} , podemos emplearla para calcular el trabajo en un tramo infinitesimal de la curva, es decir, podemos auxiliarnos de ella a fin de conseguir un diferencial de trabajo. En otras palabras, utilizaremos la estrategia de la **toma del elemento diferencial** para conseguir un diferencial de trabajo; sumando todos los diferenciales (o integrando) podemos conseguir el trabajo total.

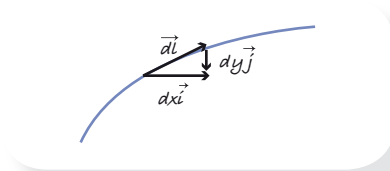
La idea es considerar un tramo infinitamente pequeño de la curva que nos permite, por un lado, verla ahí como un tramo recto y, con ello, conseguir en lo infinitamente pequeño un desplazamiento rectilíneo; y, por otro lado, la fuerza, aunque variable, pueda considerarse constante ahí. Teniendo la fuerza constante y el desplazamiento rectilíneo (en el tramo infinitesimal de la curva) podemos calcular el trabajo usando la fórmula anterior, aunque solo para conseguir un diferencial de trabajo $d\mathcal{W} = \vec{F} \cdot d\vec{l}$, donde $d\vec{l}$ es el vector desplazamiento (infinitesimal), cuya longitud dl es la longitud del tramo infinitesimal de curva y se orienta tomando en cuenta que la curva inicia en \mathcal{A} y termina en \mathcal{B} .



Por lo tanto, integrando o sumando, el trabajo de \vec{F} a lo largo de la curva C está dado por la fórmula

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

Ahora bien, observando que $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$,



y considerando \vec{F} en términos de sus componentes, $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$, la fórmula del trabajo adopta la siguiente forma:

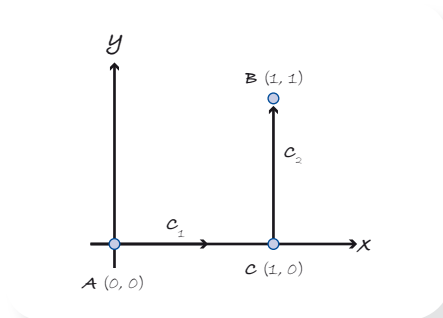
$$W = \int_C F_1 dx + F_2 dy. \quad (2.6)$$

Veamos cómo utilizar esta fórmula para calcular el trabajo en la SP-10.

Problema 1

Para todos los incisos de este problema la fuerza es la misma: $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + y\vec{j}$, entonces la forma diferencial que aparece dentro de la integral de la fórmula 2.6 se convierte en $x^2 y dx + y dy$.

Trayectoria de a)



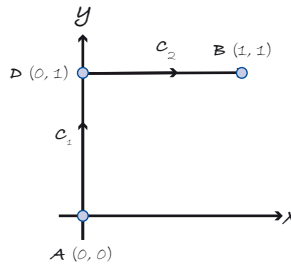
Observemos que la trayectoria tiene dos tramos: c_1 y c_2 ; luego, el trabajo es

$$w = \int_{c_1} x^2 y dx + y dy + \int_{c_2} x^2 y dx + y dy.$$

En c_1 , $y = 0$, luego $\int_{c_1} x^2 y dx + y dy = 0$.

En c_2 , $x = 1$, así que $dx = 0$ (ya que siendo x constante, su diferencial es 0 en ese tramo), entonces el primer sumando de la integral correspondiente es 0, y la integral se reduce a $\int_0^1 y dy$, que es igual a $\frac{1}{2}$ (unidades de trabajo). Por lo tanto, el trabajo total es $\frac{1}{2}$.

Trayectoria de b)



De nueva cuenta la trayectoria tiene dos tramos: c_1 y c_2 ; luego, el trabajo es

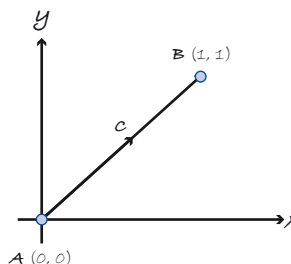
$$w = \int_{c_1} x^2 y dx + y dy + \int_{c_2} x^2 y dx + y dy.$$

En c_1 , $x = 0$, luego

$$\int_{c_1} x^2 y dx + y dy = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}.$$

En c_2 , $y = 1$, así que $dy = 0$, entonces el segundo sumando de la integral correspondiente es 0, y la integral se reduce a $\int_0^1 x^2 dx$, que es igual a $\frac{1}{3}$. Por lo tanto, el trabajo total es $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Trayectoria de c)



En este caso el recorrido consta de un sólo tramo.

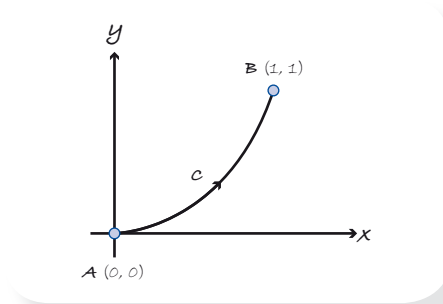
Aquí, $y = x$, así que se puede sustituir y por x en el primer sumando y tener que

$$w = \int_c x^2 y dx + y dy = \int_c x^3 dx + y dy.$$

Separando e integrando:

$$w = \int_0^1 x^3 dz + \int_0^1 y dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Trayectoria de d)



De nueva cuenta tenemos que $w = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_c x^2 y dx + y dy$; observemos que el segundo término del integrando está sólo en términos de y ; luego, podemos integrar esa parte respecto a y sin mayor problema, mientras que la primera parte involucra las variables x y y ; este término puede transformarse en uno que contenga o solo x s o solo y s (incluyendo sus diferenciales) con el uso de la ecuación de la curva C . Veamos.

El término $x^2 y dx$ se transforma en $x^2 x^2 dx$, o sea, $x^4 dx$, al sustituir y por x^2 , así se tiene:

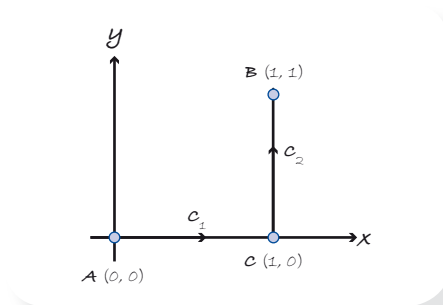
$$w = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_c x^2 y dx + y dy = \int_c x^4 dx + \int_c y dy = \int_{x=0}^{x=1} x^4 dx + \int_{y=0}^{y=1} y dy = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

Problema 2

Ahora se considera la fuerza $\vec{F}(x, y) = 3x^2 y^2 \vec{i} + 2x^3 y \vec{j}$ y se desea calcular el trabajo correspondiente para las mismas trayectorias del problema anterior. Notemos que en este caso

$$w = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_c 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy$$

Trayectoria de a)



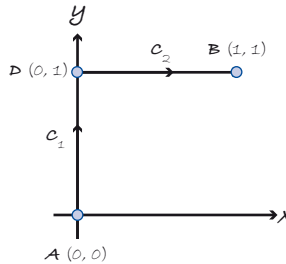
$$w = \int_{c_1} 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy + \int_{c_2} 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

En C_1 : $y = 0$, entonces ambos términos del primer integrando son 0 y, por lo tanto, esa integral vale 0.

En C_2 : $x = 1$ en toda esta trayectoria (es constante), luego $dx = 0$. Así, el primer término del segundo integrando es 0. Sustituyendo x por 1 en el segundo término tenemos que

$$w = \int_{c_2} 2y dy = \int_{y=0}^{y=1} 2y dy = 1.$$

Trayectoria de b)



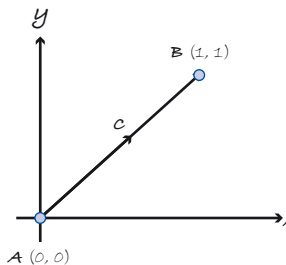
$$w = \int_{c_1} 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy + \int_{c_2} 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

En C_1 : $x = 0$, entonces ambos términos del primer integrando son 0 y, por lo tanto, esa integral vale 0.

En C_2 : $y = 1$ en toda esta trayectoria (x es constante), luego $dy = 0$. Así, el segundo término del segundo integrando es 0. Sustituyendo por 1 en el primer término tenemos que

$$w = \int_{c_2} 3x^2 dx = \int_{x=0}^{x=1} 3x^2 dx = 1.$$

Trayectoria de c)

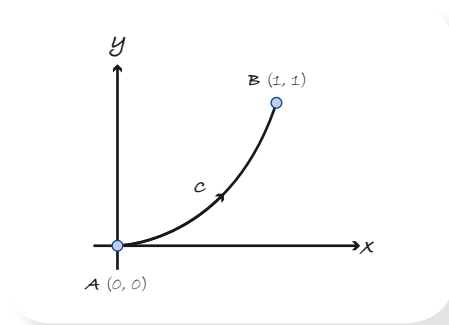


$$w = \int_c 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

Como en C se cumple que $y = x$, podemos escribir ambos sumandos de la integral en términos solamente de x o solamente de y (incluyendo sus diferenciales); se tiene así que

$$W = \int_C 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy = \int_C 3x^2 x^2 dx + 2x^3 x dx = \int_{x=0}^{x=1} 5x^4 dx = 1.$$

Trayectoria de d)



$$W = \int_C 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

A diferencia de la trayectoria anterior, donde cambiar todo a términos de las y es esencialmente lo mismo que cambiarlo a términos de las x (¡Compruébalo!), en este caso veremos que la integral que resulta involucrando únicamente las y es esencialmente diferente a la que resulta con sólo las x . Por supuesto que el resultado final (el trabajo) es el mismo. Veamos.

En C se cumple que $y = x^2$, al sustituir y por x^2 , y dy por $2x dx$ (porque si $y = x^2$, entonces $dy = 2x dx$), tenemos que

$$W = \int_C 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy = \int_C 3x^2 (x^2)^2 dx + 2x^3 x^2 (2x dx) = \int_{x=0}^{x=1} 7x^6 dx = 1$$

(comprueba que al sustituir x por \sqrt{y} , y dx por $\frac{1}{2\sqrt{y}} dy$, obtienes una integral que, evaluada de 0 a 1, tiene como resultado también 1).

Problema 3

Una diferencia importante que habrás notado entre los resultados de los problemas 1 y 2 es que en el segundo el trabajo es el mismo para todas las trayectorias estudiadas, mientras que en el primero el trabajo resulta diferente para cada trayectoria. En las consideraciones que veremos enseguida se dará una justificación del porqué de esta situación.

Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 10

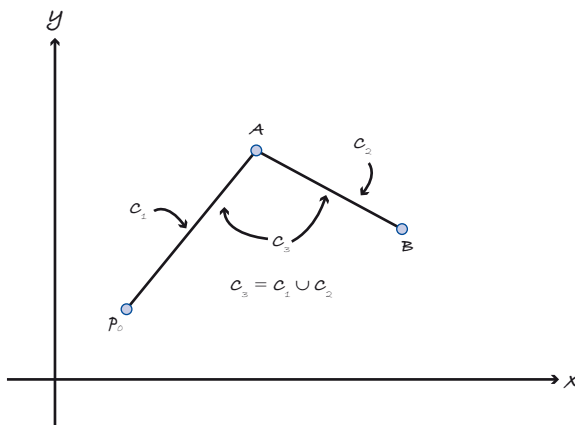
1. Caracterización de los campos cuyo trabajo no depende de la trayectoria

El resultado al que arribamos en la SP-10, en el que el trabajo para una de las fuerzas depende de la trayectoria que se elija (problema 1) y en la otra resulta ser el mismo para las cuatro trayectorias, da la pauta para pensar que hay dos tipos de campos: *i*) aquellos donde el trabajo no depende de la trayectoria que une los puntos, como son los campos constantes (que ya hemos visto) y como pareciera ser el campo $\vec{F}(x, y) = 3x^2y^2\vec{i} + 2x^3y\vec{j}$ del problema 2; y *ii*) aquellos en donde el trabajo depende de la trayectoria que une los puntos, como es el campo $\vec{F}(x, y) = x^2y\vec{i} + y\vec{j}$ del problema 1.

¿Cómo se caracterizan estos tipos de campos? Veamos.

Consideremos un campo \vec{F} , en donde el trabajo no depende de la trayectoria. El trabajo que se realiza para ir de un punto fijo $\mathcal{P}_o(x_o, y_o)$ a un punto arbitrario $\mathcal{P}(x, y)$ (que denotamos como $\mathcal{W}(\mathcal{P}_o \rightarrow \mathcal{P})$) solo depende de las coordenadas de este último, ya que independientemente de la trayectoria que los conecte, el resultado será siempre el mismo; es decir, este trabajo es una función de dos variables: $\mathcal{W}(\mathcal{P}_o \rightarrow \mathcal{P}) = \varphi(x, y) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$, donde C es cualquier trayectoria (que conecta los puntos).

Notemos además que el trabajo para ir del punto A al punto B del plano es $\mathcal{W}(A \rightarrow B) = \varphi(B) - \varphi(A)$, como puede desprenderse del siguiente análisis.



$$\int_{\mathcal{P}_o}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{P}_o}^A \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{\mathcal{P}_o}^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{P}_o}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{\mathcal{P}_o}^A \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Trabajo de } A \text{ a } B = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Vamos a comprobar que $\varphi(x, y)$ es la función potencial del campo \vec{F} , es decir, que las derivadas parciales de esta función potencial son las componentes del campo; o,

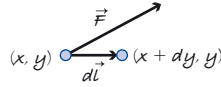
dicho de otra forma, comprobaremos que el gradiente de esta función es el campo \vec{F} ,

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} = \vec{F}.$$

Supongamos que el campo es $\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$, entonces:

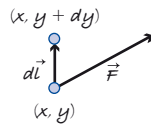
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\varphi(x + dx, y) - \varphi(x, y)}{dx} = \frac{w((x, y) \rightarrow (x + dx, y))}{dx} =$$

$$\frac{\vec{F}(x, y) \cdot (dx\vec{i})}{dx} = \frac{F_1(x, y)dx}{dx} = F_1(x, y)$$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\varphi(x, y + dy) - \varphi(x, y)}{dy} = \frac{w((x, y) \rightarrow (x, y + dy))}{dy} =$$

$$\frac{\vec{F}(x, y) \cdot (dy\vec{j})}{dy} = \frac{F_2(x, y)dy}{dy} = F_2(x, y)$$



Conclusión I:

Si \vec{F} es un campo tal que el trabajo para ir de un punto a otro es independiente de la trayectoria que los conecta, entonces es un campo gradiente, o lo que es lo mismo, este campo tiene una función potencial.

Verificaremos ahora que el inverso del resultado anterior también es cierto; es decir, si un campo es un campo gradiente (o tiene una función potencial), entonces el trabajo para ir de un punto a otro no depende de la trayectoria que los conecte. Veamos.

Supongamos que el campo $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ tiene como función potencial a $z = w(x, y)$, es decir, se cumple que $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} = M\vec{i} + N\vec{j} = \vec{F}$.

Tomemos los puntos A y B en el plano y sea C una curva que los conecta. El trabajo que se realiza para ir de A a B a través de la trayectoria C es:

$$W(A \rightarrow B) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}, \text{ pero } \vec{F} = \nabla \varphi, \text{ entonces}$$

$$W(A \rightarrow B) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{l}.$$

Ahora bien, ya que $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}$ y $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, entonces $\nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$.

Observando que el segundo término de la última igualdad es el diferencial de la función $z = \varphi(x, y)$, es decir, $\nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = dz$, tenemos que

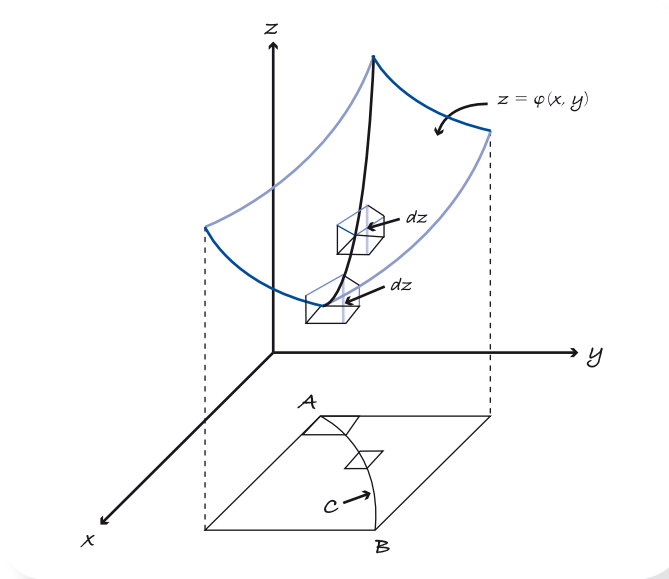
$$w(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_c \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \int_c dz$$

La última integral representa la suma de los cambios (infinitesimales) de la función $z = \varphi(x, y)$ a lo largo de la curva \mathcal{C} que empieza en \mathcal{A} y termina en \mathcal{B} ; es decir, esta integral da el cambio acumulado o cambio total de la función $z = \varphi(x, y)$, y este cambio es $\varphi(\mathcal{B}) - \varphi(\mathcal{A})$. Observemos entonces que el cambio acumulado no depende de la trayectoria, sino de los extremos de ella; es decir,

$$w(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_c \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \int_c dz = \varphi(\mathcal{B}) - \varphi(\mathcal{A}),$$

$$\text{o bien, } w(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{B}) - \varphi(\mathcal{A}),$$

como se observa en la siguiente figura.



Conclusión II:

El trabajo para ir de un punto a otro, correspondiente a una fuerza que es un campo gradiente, es independiente de la trayectoria que conecta los puntos, e igual a la diferencia del valor al final del trayecto menos el valor al principio de la función potencial.

2. Integral de línea y teorema fundamental para integrales de línea

En general, si $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ es un campo vectorial y \mathcal{C} es una curva, se puede calcular la integral $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{l}$ llamada **integral de línea** (asociada a \vec{F} y \mathcal{C}).

Estas integrales, que arrojan valores numéricos, aunque han surgido para capturar la idea general de trabajo de un campo de fuerzas a lo largo de una curva, pueden adqui-

rir otros significados, como el de *circulación* (cuando la curva es cerrada, es decir, que empieza y termina en el mismo punto), por ejemplo. Las ecuaciones de Maxwell (en la versión integral) en la electricidad y el magnetismo se leen en términos de la circulación y el flujo del campo eléctrico y del magnético. La fórmula general para el flujo de un campo será construida en la Unidad 3.

En este punto veremos algunas maneras de calcular una integral de línea de acuerdo con ciertas condiciones que se tengan tanto del campo como de la curva. Una de estas formas de calcular la integral es vía el **teorema fundamental de las integrales de línea**, que, como veremos, es una extensión del teorema fundamental del cálculo, el cual fue discutido en los cursos de Cálculo de una variable. Veamos.

a) Si la curva \mathcal{C} , que empieza en $\mathcal{A}(x_1, y_1)$ y termina en $\mathcal{B}(x_2, y_2)$, corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$. Al ser $\mathcal{M}(x, y)$ y $\mathcal{N}(x, y)$ expresiones con términos en x y y , la forma diferencial que aparece dentro de la integral de línea, $\mathcal{M}(x, y)dx + \mathcal{N}(x, y)dy$, se puede transformar en una expresión que contenga solo términos en x y dx al hacer las sustituciones de y por $f(x)$ y de dy por $f'(x)dx$ (ya que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$). Así, la integral de línea se transforma en una integral simple (la cual se estudió en el Tomo II de esta serie de libros), que va de x_1 a x_2 . De hecho, este procedimiento ya lo utilizamos cuando resolvimos los incisos c) y d) de los problemas 1 y 2 de la SP-10.

De modo similar, si la curva \mathcal{C} corresponde a la gráfica de una función $x = g(y)$, ahora podemos tener todo el integrando solamente en términos de y y de dy , al hacer las sustituciones de x por $g(y)$ y de dx por $g'(y)dy$ (ya que $\frac{dx}{dy} = g'(y)$).

De nuevo, la integral de línea se transforma en una integral simple de una función de una variable, aunque ahora la variable es y , cuyos valores van de y_1 a y_2 .

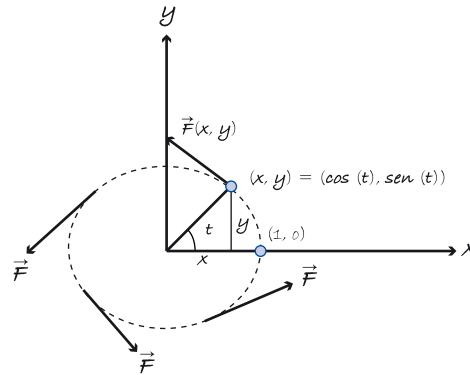
b) Si la curva \mathcal{C} está “parametrizada”, es decir, los puntos de la curva están en función de un parámetro (por ejemplo, t , o sea, $(x, y) = (x(t), y(t))$), entonces la integral de línea puede transformarse en una integral de una función de t solamente desde t_1 hasta t_2 (los valores de t correspondientes al punto inicial y final de la curva, respectivamente), sustituyendo en el integrando de la integral de línea: x por $x(t)$, y por $y(t)$, dx por $x'(t)dt$, y dy por $y'(t)dt$.

Por ejemplo, calculemos la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$, donde $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ y \mathcal{C} es la circunferencia unitaria con centro en el origen. Antes de proceder es conveniente decir que en el caso de que la curva sea cerrada, como aquí sucede, se acostumbra escribir la integral de línea así: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$. Se podría decir que estamos entonces calculando la *circulación* del campo \vec{F} a lo largo de la curva \mathcal{C} .

En este caso la circunferencia se puede parametrizar con las ecuaciones $x = \cos(t)$ y $y = \text{sen}(t)$; al hacer variar el parámetro t desde 0 hasta 2π se recorre toda la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, iniciando en el punto $(1, 0)$ y terminando ahí mismo. Tenemos entonces que $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}} -ydx + xdy$. Ahora, como $x = \cos(t)$, luego $dx = -\text{sen}(t)dt$; además, como $y = \text{sen}(t)$ y $dy = \cos(t)dt$, se tiene:

$$\int_{\mathcal{C}} -ydx + xdy = \int_0^{2\pi} [-\text{sen}(t)] [-\text{sen}(t)dt] + \cos(t)\cos(t)dt = \int_0^{2\pi} [\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)]dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

En la siguiente figura se muestra la disposición de los vectores de fuerza $\vec{F}(x, y)$ a lo largo de la circunferencia.



- c) Consideremos el caso de que $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ sea un gradiente, es decir, que exista una función $z = \varphi(x, y)$ (la función potencial) tal que

$$\nabla\varphi(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)\vec{j} = \vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}.$$

Entonces,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{l}.$$

Si recordamos que para $z = \varphi(x, y)$, $dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)dy = \nabla\varphi \cdot d\vec{l}$, entonces tenemos que $\int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = \int_C dz = \varphi(\mathcal{B}) - \varphi(\mathcal{A})$.

En resumen: para calcular el valor de la integral de línea cuando el integrando es un **diferencial exacto** (o total), basta evaluar la función de donde proviene el diferencial (la función potencial del correspondiente campo vectorial) en el extremo final y restarle la evaluación del extremo inicial.

Este resultado merece ser resaltado y, de hecho, recibe el nombre de

Teorema fundamental de las integrales de línea

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = \varphi(\mathcal{B}) - \varphi(\mathcal{A})$$

Para cualquier trayectoria \mathcal{C} que una \mathcal{A} con \mathcal{B} .

Este teorema puede verse como una extensión del teorema fundamental del cálculo para funciones de una variable, como veremos a continuación.

Consideremos la siguiente situación particular:

- i) $\varphi(x, y) = f(x)$, es decir, la función solo depende de x .
- ii) \mathcal{C} es la trayectoria en línea recta que va sobre el eje x , empezando en $\mathcal{A}(a, 0)$ y terminando en $\mathcal{B}(b, 0)$.

Tenemos lo siguiente: $\nabla \varphi(x, y) = f'(x)\vec{i}$, $d\vec{l} = dx\vec{i}$ y $\nabla \varphi \cdot d\vec{l} = f'(x)dx$;
 luego, $\int_c \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \varphi(\mathcal{B}) - \varphi(\mathcal{A})$ se convierte en $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Este último resultado es el teorema fundamental del cálculo para funciones de una variable.

3. Un criterio práctico para determinar si un campo es gradiente; un método sistemático para obtener la función potencial

En el inciso c) del punto anterior vimos que calcular el valor de una integral de línea es tan fácil como evaluar una función en los extremos y restar; pero esto es cierto si el integrando, digamos $\mathcal{M}(x, y)dx + \mathcal{N}(x, y)y$, es un diferencial exacto o, lo que es lo mismo, que el campo $\vec{F}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)\vec{i} + \mathcal{N}(x, y)\vec{j}$ sea un campo gradiente.

Ahora, ¿cómo saber si $\vec{F}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)\vec{i} + \mathcal{N}(x, y)\vec{j}$ es un campo gradiente?; y si lo es, ¿cómo saber cuál es su función potencial? Veamos.

Si el campo $\vec{F}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)\vec{i} + \mathcal{N}(x, y)\vec{j}$ fuera el campo gradiente de una función escalar $\varphi(x, y)$, se debería cumplir que $\mathcal{M} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ y $\mathcal{N} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, y ya que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales, se tendría en consecuencia que $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x}$.

Tenemos entonces lo siguiente: para que el campo $\vec{F}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)\vec{i} + \mathcal{N}(x, y)\vec{j}$ sea un campo gradiente es necesario que $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x}$.

Podemos decir entonces que si $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} \neq \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x}$ el campo no es campo gradiente.

Ahora comprobaremos que la condición de que $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x}$ es suficiente para afirmar que el campo $\vec{F}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)\vec{i} + \mathcal{N}(x, y)\vec{j}$ es un campo gradiente; además, esa condición permite construir la función potencial $\varphi(x, y)$. Veamos.

Se necesita construir $\varphi(x, y)$ que satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathcal{M}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mathcal{N}$.

Tomamos la primera ecuación $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathcal{M}$ y antiderivamos parcialmente respecto a x para obtener la función $\varphi(x, y)$, es decir:

$\varphi(x, y) = \int \mathcal{M}(x, y)dx + c(y)$, donde $c(y)$ es una función de y que se agrega a la integral porque si bien es cierto que la derivada parcial respecto a x de la integral planteada es \mathcal{M} , también es cierto que la derivada parcial respecto a y de la integral más cualquier función de y , es \mathcal{M} , ya que la derivada parcial respecto a x de una función de y es cero. Pero ¿cómo calcular $c(y)$?

Ya sabemos que

$$\varphi(x, y) = \int \mathcal{M}(x, y)dx + c(y). \quad (2.7)$$

Cumple que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathcal{M}$; entonces, ¿cómo debe ser $c(y)$ para que $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mathcal{N}$?

Si derivamos parcialmente (2.7) respecto a y e igualamos el resultado con \mathcal{N} , obtendremos una condición para $c(y)$, es decir, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \int \mathcal{M}(x, y)dx}{\partial y} + c'(y) = \mathcal{N}$.

Se debe entonces cumplir que $c'(y) = \mathcal{N}(x, y) - \frac{\partial \int \mathcal{M}(x, y)dx}{\partial y}$.

Esta última expresión solo depende de la variable y , ya que al derivarla respecto a x se anula. Veamos:

$$\frac{\partial \left(N(x, y) - \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) -$$

igualdad de segundas derivadas parciales mixtas

$$\frac{\partial^2 \int M(x, y) dx}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 \int M(x, y) dx}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 0$$

Condición establecida

Como $c'(y) = N(x, y) - \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y}$, tenemos que $c(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y} \right] dy$.

Recordando que $\varphi(x, y) = \int M(x, y) dx + c(y)$, tenemos finalmente:

$$\varphi(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial \int M(x, y) dx}{\partial y} \right] dy.$$

Se puede verificar que para la función $\varphi(x, y)$ obtenida se cumple:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M \text{ y } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N.$$

Ejemplo. Consideremos el campo $\vec{F}(x, y) = 3x^2y^2\vec{i} + 2x^3y\vec{j}$ del problema 2 de la SP-10. Verifica que es un campo gradiente y determina su función potencial.

Observemos que en este caso, $M(x, y) = 3x^2y^2$, $N(x, y) = 2x^3y$; entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y$. Por lo tanto, el campo \vec{F} es un campo gradiente.

Veamos cómo obtener su función potencial.

- Tomamos $M(x, y) = 3x^2y^2$ y antiderivamos respecto a x para tener $\varphi(x, y) = x^3y^2 + c(y)$.
- Para obtener $c(y)$, derivamos $w(x, y) = x^3y^2 + c(y)$ respecto a y e igualamos a $N(x, y) = 2x^3y$; así se obtiene $2x^3y + c'(y) = 2x^3y$, de donde $c'(y) = 0$.
- Integrando $c'(y) = 0$ respecto a y se tiene que $c(y) = 0$, una constante numérica.
- Regresando al inciso a) y sustituyendo $c(y)$ por c se concluye que $\varphi(x, y) = x^3y^2 + c$.

Como este campo es un campo gradiente, sabemos por el punto 1 de estas consideraciones que el trabajo para ir de un punto a otro es independiente de la trayectoria. Además, sabemos que el trabajo para ir de A a B es $\varphi(B) - \varphi(A)$. En particular, si consideramos los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$, el trabajo será $W = \varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) = 1$, que es lo que obtuvimos para las distintas trayectorias consideradas en el problema 2 de la SP-10.

Si ahora tomamos el campo del problema 1 de la misma situación-problema, $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + y \vec{j}$, tenemos que $M(x, y) = x^2 y$, $N(x, y) = y$. En este caso vemos que como $\frac{\partial M}{\partial y} = x^2$ es diferente de $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, resulta que este campo no es campo gradiente; por lo tanto, es normal que se puedan encontrar distintas trayectorias que conecten a dos mismos puntos y que el trabajo correspondiente resulte diferente, como ya lo constatamos en este caso.

4. Ecuaciones diferenciales exactas

Uno de los problemas primordiales en la ingeniería es establecer relaciones entre magnitudes a través de fórmulas que las involucren; muchas veces esto se logra estableciendo primero una ecuación que relaciona diferenciales o razones de cambio de las magnitudes, para que con base en ella se intente obtener la fórmula que relaciona las magnitudes. Las ecuaciones que llevan a cabo estas relaciones se llaman **ecuaciones diferenciales**.

En particular, en este punto consideraremos las llamadas **ecuaciones diferenciales exactas**, que son ecuaciones de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ cuya forma diferencial de la izquierda es un diferencial exacto. Es decir, esta ecuación diferencial es exacta si existe una función $z = \varphi(x, y)$ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N$.

Ahora bien, el criterio para saber que la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es exacta es el mismo para comprobar que el correspondiente campo vectorial $M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ es un campo gradiente: $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es exacta si y sólo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Consideremos, por ejemplo, las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a) (2xy + 2)dx + (x^2 + 3)dy = 0, \quad b) (x^2y + 1)dx + xydy = 0.$$

Apliquemos el criterio para saber si son exactas o no.

Tomando la primera ecuación diferencial y fijándonos en la forma diferencial del lado izquierdo: $(2xy + 2)dx + (x^2 + 3)dy$, tenemos que $M(x, y) = 2xy + 2$ y $N(x, y) = x^2 + 3$. Luego, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$, y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$, por lo tanto, esta ecuación diferencial *es* exacta.

Considerando ahora la segunda: $(x^2y + 1)dx + xydy = 0$, tenemos que $M(x, y) = x^2y + 1$ y $N(x, y) = xy$. Luego, $\frac{\partial M}{\partial y} = x^2$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = y$, por lo tanto, esta ecuación diferencial *no es* exacta.

Resolución de ecuaciones diferenciales exactas

A continuación desarrollaremos una estrategia para obtener la solución de ecuaciones diferenciales exactas; tomaremos como ejemplo la primera ecuación diferencial. Cabe aclarar que la segunda, no siendo exacta, no significa que no se pueda llegar a su solución, solo que nuestro propósito en este libro no es obtener soluciones de ecuaciones diferenciales en sí, tarea más propia de libros sobre ese tema en específico. Abordamos la solución de las ecuaciones diferenciales exactas porque la forma de hacerlo involucra conceptos que hemos estado utilizando, como es el caso de la función potencial. Además, el tratamiento de este tipo de ecuaciones diferenciales abre

la puerta al surgimiento de ideas nuevas e importantes como el de las familias de curvas ortogonales que, como veremos, son esenciales en la descripción del comportamiento de las líneas del flujo de calor y las líneas del campo eléctrico, por ejemplo.

Tomemos la ecuación diferencial de la cual ya sabemos que es exacta, $(2xy + 2)dx + (x^2 + 3)dy$, y

a) Construimos la función potencial $z = \varphi(x, y)$.

Ya que $z = \varphi(x, y)$ debe cumplir las condiciones 1) $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy + 2$ y 2) $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + 3$, tomamos la condición 1 y antiderivamos parcialmente respecto a x : estamos “despejando” φ de la primera ecuación, es decir, deshaciendo la operación de derivar parcialmente respecto a x que se le ha hecho a φ . Tenemos entonces que φ debe ser de la forma $x^2y + 2x + c(y)$: $\varphi(x, y) = x^2y + 2x + c(y)$, donde $c(y)$ es una función solamente de y .

Conviene en este momento hacer dos comentarios:

- i. Se puede pensar que agregar $c(y)$ es superfluo y podríamos considerar simplemente que $\varphi(x, y) = x^2y + 2x$; la verdad es, aunque esta función satisface la condición 1, no satisface la 2: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 \neq x^2 + 3$. $c(y)$ se agrega para determinar precisamente lo que le falta para cumplir la otra condición.
- ii. También se puede tomar la segunda condición, antiderivar parcialmente con respecto a y , agregando ahora un $c(x)$, y continuar con los pasos correspondientes para conseguir $\varphi(x, y)$.

Para que $\varphi(x, y) = x^2y + 2x + c(y)$ quede completamente establecida, falta determinar $c(y)$. Ahora bien, $c(y)$ debe ser tal que $\varphi(x, y) = x^2y + 2x + c(y)$ satisfaga la segunda condición. Es decir, la derivada parcial respecto a y de $\varphi(x, y) = x^2y + 2x + c(y)$ debe ser $x^2 + 3$, por lo que se tiene que cumplir que $x^2 + c'(y) = x^2 + 3$ (nota que como $c(y)$ es una función de y solamente, su derivada parcial respecto a y coincide con la derivada), de donde $c'(y) = 3$; y antiderivando se tiene que $c(y) = 3y + k$, donde k es una constante numérica. Por lo tanto, la función potencial es $\varphi(x, y) = x^2y + 2x + 3y + k$.

b) Siendo exacta la ecuación diferencial $(2xy + 2)dx + (x^2 + 3)dy$, y $z = \varphi(x, y)$ la función potencial de la forma diferencial $(2xy + 2)dx + (x^2 + 3)dy$, se tiene que $dz = (2xy + 2)dx + (x^2 + 3)dy$. Por lo tanto, la ecuación diferencial puede escribirse en forma abreviada así: $dz = 0$.

c) Si se tiene que $dz = 0$, entonces $z = C$ (integrando en ambos lados); pero $z = \varphi(x, y)$ y la ecuación $z = C$ se transforma entonces en $\varphi(x, y) = C$, que es la solución de la ecuación diferencial exacta. Es decir, hemos encontrado que la relación entre las variables x y y que satisface la ecuación que relaciona sus diferenciales dx y dy (ecuación diferencial) está dada por la fórmula $\varphi(x, y) = C$. Observa que si “diferenciamos” en ambos lados de esta fórmula (o calculamos el diferencial total) se tiene precisamente la ecuación diferencial exacta original.

Teniendo explícitamente que en nuestro caso $\varphi(x, y) = x^2y + 2x + 3y + k$, la solución general de la ecuación diferencial exacta es $x^2y + 2x + 3y + k = C$, o bien,

$$x^2y + 2x + 3y = c \quad (2.8)$$

donde $c = C - k$.

d) Observemos que la solución general la constituye una familia de curvas en el plano xy . Si adicionalmente se pide una solución de la ecuación diferencial exacta que pase por determinado punto del plano (o una solución particular), esto equivale a especificar una curva de esta familia. Por ejemplo, si pedimos que pase por el punto $\mathcal{P}(1, 2)$, sustituimos $x = 1$ y $y = 2$ en (2.8) para obtener el valor correspondiente a c , que resulta ser 10 . Por lo tanto, la solución pedida con esa condición particular es: $x^2y + 2x + 3y = 10$.

En general, si $\mathcal{M}(x, y)dx + \mathcal{N}(x, y)dy = 0$, es una ecuación diferencial exacta (es decir, se cumple que $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x}$) entonces la solución es $\varphi(x, y) = c$: *la familia de las curvas de nivel de la función potencial o familia de curvas equipotenciales* (la función potencial φ es aquella cuyo diferencial es $d\varphi = \mathcal{M}(x, y)dx + \mathcal{N}(x, y)dy$).

Una interpretación geométrica de este resultado es que si nos movemos sobre una curva de nivel de una función, es decir, sobre una curva donde el valor de la función no cambia o es constante, entonces los cambios infinitesimales de los valores de la función o sus diferenciales son siempre 0.

Así como una ecuación diferencial exacta tiene como solución una familia de curvas de nivel de una función de dos variables, dada una familia de curvas de nivel de una función de dos variables se puede construir la ecuación diferencial exacta de esa familia de curvas, teniendo como solución la misma familia. Veamos.

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces la familia de las curvas de nivel es $f(x, y) = c$. Tomando el diferencial en ambos lados se obtiene la ecuación diferencial de la familia de curvas de nivel: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = 0$.

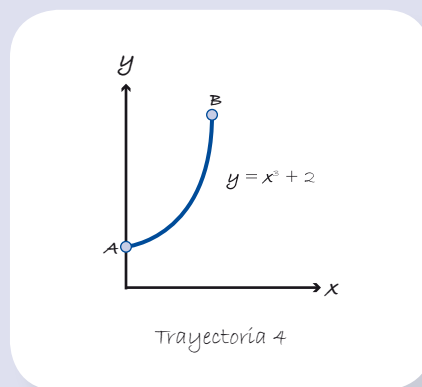
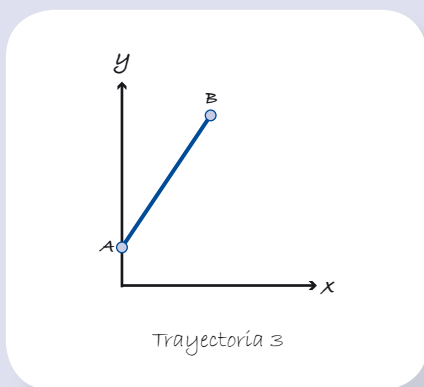
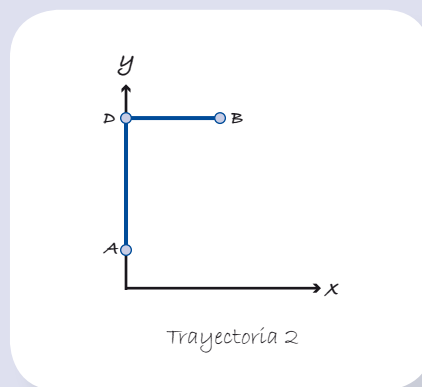
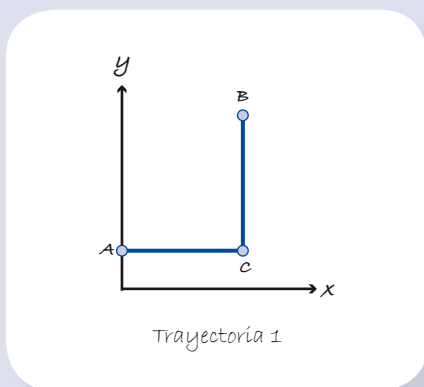
Tomemos por ejemplo el paraboloides con ecuación $z = f(x, y) = x^2 + y^2$; la familia de curvas de nivel es la familia de circunferencias con centro en el origen: $x^2 + y^2 = c$.

Diferenciando en ambos lados se tiene $2xdx + 2ydy = 0$, o bien, $xdx + ydy = 0$.

Esta es la ecuación diferencial de la familia de circunferencias con centro en el origen. Solo como un ejercicio se puede resolver esta ecuación diferencial y observar que, en efecto, su solución es la familia de circunferencias dada.

1. Considera al campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$.

a) Calcula el trabajo desarrollado por el campo desde $A = (0, 2)$ hasta $B = (2, 10)$ a través de cada una de las cuatro trayectorias abajo indicadas.



b) ¿ \vec{F} es gradiente?

c) Si es gradiente, calcula la función potencial.

d) Si procede, calcula el trabajo para ir de A a B usando la función potencial.

e) ¿Coincide el resultado anterior con los del inciso a)? ¿Por qué?

2. Considera el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ y responde las mismas preguntas que el problema anterior.

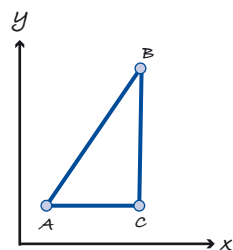
3. Para cada uno de los campos de fuerza dados:

a) $\vec{F}(x, y) = 3xy^2\vec{i} + x^3y\vec{j}$

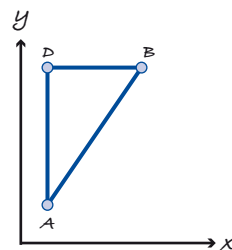
b) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$

c) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$

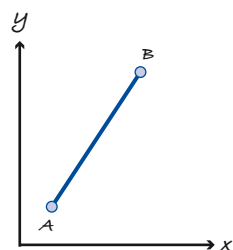
calcula el trabajo desarrollado por el campo desde $A = (1, 1)$ hasta $B = (3, 9)$ por medio de cada una de las cuatro trayectorias indicadas en la página siguiente.



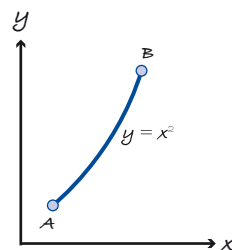
Trayectoria 1



Trayectoria 1

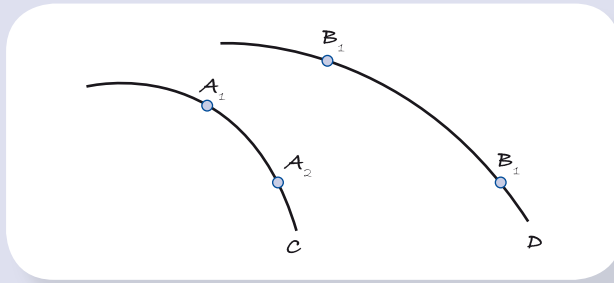


Trayectoria 1



Trayectoria 1

4. a) Usa el criterio para determinar si un campo vectorial es gradiente en los campos del problema anterior y clasifícalos (gradiente o no gradiente).
 b) Para el campo gradiente, calcula su función potencial y con ella el trabajo para ir de A a B . Este último valor debe coincidir con el trabajo que obtuviste con las distintas trayectorias del problema anterior.
5. Comprueba que cada uno de los campos dados es gradiente y calcula, usando la función potencial, el trabajo desarrollado por el campo desde A hasta B usando la función potencial.
 - a) $\vec{F}(x, y) = 2xe^y\vec{i} + x^2e^y\vec{j}$; $A = (1, \ln 3)$, $B = (5, \ln 9)$
 - b) $\vec{F}(x, y) = -y^3\sin(x)\vec{i} + 3y^2\cos(x)\vec{j}$; $A = (0, 1)$, $B = (2\pi, 2)$
6. Considera al campo $\vec{F}(x, y) = 3xy^2\vec{i} + ax^n y\vec{j}$.
 - a) Determina los valores de a y n para que \vec{F} sea un campo gradiente.
 - b) Con los valores de a y n calculados en a) obtén la función potencial de \vec{F} .
 - c) Calcula el trabajo desarrollado por el campo desde $(0, 0)$ hasta $(5, 7)$.
 - d) Obtén la función potencial $\varphi(x, y)$ tal que $\varphi(1, 2) = 9$.
7. Considera a $\varphi(x, y)$, la función potencial de un campo \vec{F} ; si A_1 y A_2 son puntos de una misma curva equipotencial c , y B_1 y B_2 son puntos de una misma curva equipotencial d , como se muestra en la figura, explica por qué el trabajo desarrollado por el campo para ir de A_1 a B_1 es el mismo que el trabajo desarrollado por el campo para ir de A_2 a B_2 .



8. El gradiente y las reglas de derivación.

- a) Considera la función $z = h(x, y) = f(x) + g(y)$, verifica que en este caso el gradiente de h está dado por la fórmula $\nabla h(x, y) = f'(x)\vec{i} + g'(y)\vec{j}$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar una suma. Esto implica que cada vez que notemos que el gradiente de h está dado por ésta fórmula, podemos fácilmente reconstruir la expresión para h .
- b) Considera la función $z = h(x, y) = g(y)f(x)$, verifica que en este caso el gradiente de h está dado por la fórmula $\nabla h(x, y) = g(y)f'(x)\vec{i} + f(x)g'(y)\vec{j}$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar un producto. Esto implica que cada vez que veamos que el gradiente de h está dado por esta fórmula, podemos reconstruir fácilmente la expresión para h .
- c) Considera la función $z = h(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$, verifica que en este caso el gradiente de h está dado por la fórmula $\nabla h(x, y) = \frac{g(y)f'(x)\vec{i} - f(x)g'(y)\vec{j}}{(g(y))^2}$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar un cociente. Esto implica que cada vez que notemos que el gradiente de h está dado por esta fórmula, podemos fácilmente reconstruir la expresión para h .
- d) En cada caso obtén la expresión para $h(x, y)$ a partir de su gradiente
- $\nabla h(x, y) = 2x^5\vec{i} + 4e^y\vec{j}$
 - $\nabla h(x, y) = \text{sen}(x)\vec{i} + \frac{5}{y}\vec{j}$
 - $\nabla h(x, y) = 6x^5 \text{sen}(y)\vec{i} + x^6 \cos(y)\vec{j}$
 - $\nabla h(x, y) = e^x y^3\vec{i} + 3e^x y^2\vec{j}$
 - $\nabla h(x, y) = \frac{e^x y^4 z - 4e^x y^3\vec{j}}{y^3}$
 - $\nabla h(x, y) = \frac{\cos(x) \ln(y)\vec{i} + \frac{\text{sen}(x)}{y}\vec{j}}{[\ln(y)]^2}$

9. El diferencial total, reglas de derivación y ecuaciones exactas.

- a) Considera la función $z = h(x, y) = f(x) + g(y)$, verifica que en este caso el diferencial total dz está dado por la fórmula $dz = f'(x)dx + g'(y)dy$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar una suma. Esto implica que cada vez que nos demos cuenta de que el diferencial total de una variable z está dado por esta fórmula, podemos reconstruir fácilmente la expresión para z .
- b) Considera la función $z = h(x, y) = g(y)f(x)$, verifica que en este caso el diferencial total dz está dado por la fórmula $dz = g(y)f'(x)dx + f(x)g'(y)dy$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar un producto. Esto implica que cada vez que notemos que el diferencial total de una variable z está dado por esta fórmula, podemos fácilmente reconstruir la expresión para z .

c) Considera la función $z = h(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$, verifica que en este caso el diferencial total dz está dado por la fórmula $dz = \frac{g(y)f'(x)dx - f(x)g'(y)dy}{[g(y)]^2}$, lo cual nos recuerda la fórmula para derivar un cociente. Esto implica que cada vez que nos demos cuenta de que el diferencial total de una variable está dado por ésta fórmula, podemos reconstruir fácilmente la expresión para z .

d) En cada caso obtén la solución de la ecuación diferencial

i) $2x^5 dx + 4e^y dy = 0$

ii) $\nabla h(x, y) = \text{sen}(x)\vec{i} + \frac{5}{y}\vec{j} = 0$

iii) $6x^5 \text{sen}(y) dx + x^6 \cos(y) dy = 0$

iv) $e^x y^3 dx + 3e^x y^2 dy = 0$

v) $\frac{e^x y^4 dx - 4e^x y^3 dy}{y^5} = 0$

vi) $\frac{\cos(x)\ln(y)dx - \frac{\text{sen}(x)}{y}dy}{[\ln(y)]^2} = 0$

10. Obtén la ecuación diferencial de la familia de curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones.

a) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $z = f(x, y) = x^2 y^2 + 3x - y$

c) $z = f(x, y) = 3x - y$

d) $z = f(x, y) = y - x^2$

e) $z = f(x, y) = y - \text{sen}(x)$

2.4

Derivada direccional, curvas de máximo crecimiento y líneas de un campo

En este tema extenderemos la idea de derivada parcial en el sentido de saber la razón con la que cambia el valor de una función cuando se sigue cualquier dirección dada, y no limitarnos a las direcciones particulares que se consideran en las derivadas parciales. Esta “derivada”, más amplia, se llama **derivada direccional**. Ya que tengamos las razones de cambio en cualquier dirección se verá que la dirección que da el gradiente es la que produce el máximo crecimiento. Esto último nos muestra un atributo más de los gradientes y explica la razón por la que este concepto está involucrado en importantes fórmulas de la Física, como veremos. Adicionalmente se verá que en la dirección perpendicular a un gradiente, la razón a la que cambia el valor de la función es nula.

La familia de curvas que siguen las direcciones de los vectores gradientes de una función (curvas de máximo crecimiento) y la familia de curvas perpendiculares a ellas son de particular importancia en varios contextos de la ingeniería, como la propagación del calor y las líneas de un campo eléctrico. Esto da la pauta para considerar el cálculo de integrales de línea sobre trayectorias a lo largo de las cuales el campo es siempre tangente o normal a la trayectoria. Asimismo, la observación de que un punto del plano queda determinado por la intersección de dos curvas, una de cada familia, nos hará pensar en sistemas de coordenadas diferentes al cartesiano, en particular en el sistema de coordenadas polares, que se estudia en este tema.

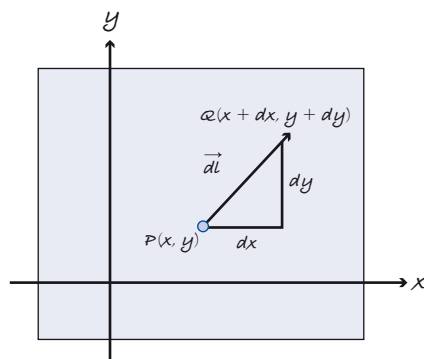
Con la siguiente situación-problema iniciamos la explicación de los conceptos e ideas que hemos mencionado.

Situación-Problema 11 (SP-11)

Supongamos que la temperatura en cada punto de una placa, donde se ha colocado un sistema de coordenadas xy , está dada por la ecuación $T = T(x, y)$.

Fijemos un punto $\mathcal{P}(x, y)$ en la placa y a partir de éste tomemos un vector desplazamiento $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

Al final de este vector se encuentra el punto de la placa $\mathcal{Q}(x + dx, y + dy)$.



- ¿Cómo representas lo que varía la temperatura cuando se pasa del punto \mathcal{P} al punto \mathcal{Q} ?
- ¿Cómo representas este cambio en términos de las derivadas parciales de \mathcal{T} ?
- ¿Cómo representas este cambio en términos del gradiente de \mathcal{T} y el vector desplazamiento \overline{dl} ?
- Si dl es la magnitud del desplazamiento, expresa con tus palabras lo que entiendes por el cociente $\frac{d\mathcal{T}}{dl}$ en términos de la temperatura.
- Explica por qué $\frac{d\mathcal{T}}{dl} = \frac{\nabla\mathcal{T} \cdot \overline{dl}}{dl}$.
- Teniendo que $\frac{d\mathcal{T}}{dl} = \frac{\nabla\mathcal{T} \cdot \overline{dl}}{dl} = \nabla\mathcal{T} \cdot \frac{\overline{dl}}{dl}$, ¿por qué $\frac{d\mathcal{T}}{dl} = |\nabla\mathcal{T}| \cos \alpha$, y qué ángulo es α ?

El cociente $\frac{d\mathcal{T}}{dl}$ se llama **derivada direccional** de \mathcal{T} en el punto \mathcal{P} en la dirección dada por el vector \overline{dl} ; su valor depende tanto del punto \mathcal{P} como de la dirección dada.

Considerando que el punto \mathcal{P} está fijo y, en consecuencia, el gradiente de \mathcal{T} en este punto, $\nabla\mathcal{T}(\mathcal{P})$, también lo está, utiliza el resultado en f) para responder lo siguiente:

- ¿Cuál es el valor máximo de la derivada direccional $\frac{d\mathcal{T}}{dl}$, y para qué valor de α se alcanza este máximo?
- En general, dado el punto \mathcal{P} y la función de temperatura $\mathcal{T} = \mathcal{T}(x, y)$, ¿en qué dirección la derivada direccional es máxima y cuál es su valor?

Discusión de la Situación-Problema 11

En general, lo que cambia la temperatura, cuando se pasa de un punto \mathcal{P} de la placa a otro punto \mathcal{Q} , es la diferencia de valores $\mathcal{T}(\mathcal{Q}) - \mathcal{T}(\mathcal{P})$, y se acostumbra representarla por $\Delta\mathcal{T}$; pero si estos puntos están a una distancia infinitesimal, como es el caso en esta situación problema, esta diferencia se convierte en un diferencial de temperatura y se escribe así: $d\mathcal{T}$. En términos de las coordenadas de los puntos se tiene que $d\mathcal{T} = \mathcal{T}(x + dx, y + dy) - \mathcal{T}(x, y)$.

Este diferencial o cambio infinitesimal de temperatura puede escribirse en términos de las derivadas parciales de \mathcal{T} , como se vio en el Tema 2 de esta unidad:

$$d\mathcal{T} = \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial y}(x, y)dy.$$

Si consideramos el gradiente de \mathcal{T} : $\nabla \mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}(x, y)\vec{j}$, y el vector de desplazamiento infinitesimal $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, tenemos que el producto escalar de estos dos vectores es:

$$\nabla \mathcal{T} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}(x, y)\vec{j} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}(x, y)dy.$$

Entonces se tiene también que $d\mathcal{T} = \nabla \mathcal{T} \cdot d\vec{l}$ (2.9)

Al margen de la forma que adquiera $d\mathcal{T}$, si dividimos este diferencial entre dl , la magnitud del vector desplazamiento, tenemos “una” razón de cambio de la temperatura respecto al desplazamiento. Decimos “una” porque estas razones de cambio dependen de la dirección del vector $d\vec{l}$. Piénsese, por ejemplo, en las derivadas parciales, ambas son razones de cambio, pero una es respecto al avance en dirección del eje x y la otra en dirección del eje y , ambas pueden tener valores completamente diferentes. Tomando la división de $d\mathcal{T}$ entre dl y usando la fórmula 2.9 tenemos:

$\frac{d\mathcal{T}}{dl} = \frac{\nabla \mathcal{T} \cdot d\vec{l}}{dl} = \nabla \mathcal{T} \cdot \frac{d\vec{l}}{dl}$, entonces $\frac{d\mathcal{T}}{dl} = |\nabla \mathcal{T}| \frac{d\vec{l}}{dl} \cos \alpha$, donde α es el ángulo entre el vector gradiente y el vector desplazamiento.

Si reconocemos que un vector dividido entre su magnitud es un vector unitario (de longitud 1), entonces tenemos que

$$\frac{d\mathcal{T}}{dl} = |\nabla \mathcal{T}| \cos \alpha.$$

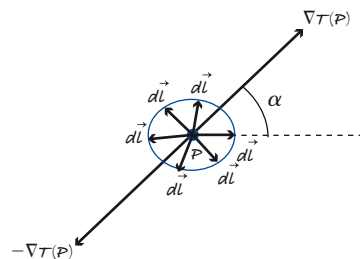
Dado un punto \mathcal{P} en el plano y la dirección del desplazamiento, la magnitud del gradiente en ese punto, es decir, $|\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})|$, queda determinada, lo mismo que el ángulo α y, por lo tanto, queda definido un número $\frac{d\mathcal{T}}{dl}$ que se conoce como **derivada direccional** en ese punto \mathcal{P} y en la dirección dada.

Si fijamos un punto \mathcal{P} en el plano, entonces $|\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})|$ también está fijo, por lo tanto, la derivada direccional solo depende del ángulo α (recordemos que $\frac{d\mathcal{T}}{dl} = |\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})| \cos \alpha$).

Como $\cos \alpha$ varía entre -1 y 1 , la derivada direccional tiene como valor máximo $|\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})|$, cuando $\cos \alpha = 1$, y un valor mínimo de $-|\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})|$, cuando $\cos \alpha = -1$. Tenemos entonces que dado el punto \mathcal{P} , el valor máximo de la derivada direccional es $|\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})|$ y el mínimo es $-|\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})|$, ¿en qué direcciones se dan estos valores extremos de la derivada direccional?

Como $\cos \alpha = 1$ cuando $\alpha = 0$ y α es el ángulo entre $\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})$ (que quedó fijo) y el vector desplazamiento, entonces el valor máximo de la derivada direccional en un punto se obtiene cuando el desplazamiento se toma en dirección del gradiente de la temperatura en ese punto.

De modo similar, $\cos \alpha = -1$ cuando $\alpha = \pi$; podemos decir entonces que el valor mínimo de la derivada direccional se da en dirección contraria al gradiente en el punto.



De todas las direcciones posibles a partir de un punto \mathcal{P} de la placa, la dirección indicada por el gradiente $\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})$ es la dirección en que se maximiza la razón de cambio de la temperatura respecto al desplazamiento y la dirección contraria, es decir, la del vector $-\nabla \mathcal{T}(\mathcal{P})$ es la dirección en que se minimiza dicha razón de cambio.

Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 11

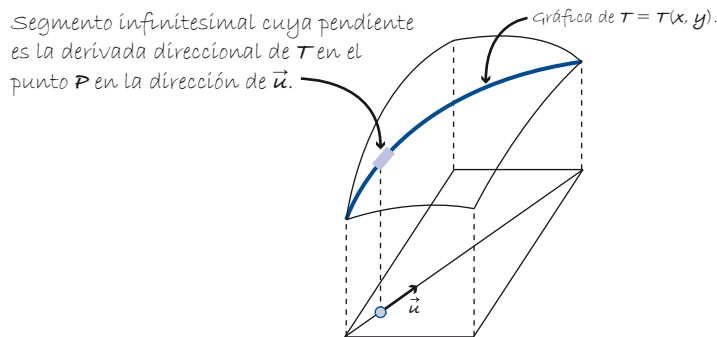
1. La derivada direccional como extensión de las derivadas parciales

Que la derivada direccional sea $\frac{dT}{dl} = \nabla T \cdot \frac{d\vec{l}}{dl}$, y que $\frac{d\vec{l}}{dl}$ sea un vector unitario indica que, dada una dirección y un vector \vec{u} unitario que va en esa dirección, la derivada direccional de T en el punto \mathcal{P} del plano, en la dirección de \vec{u} , se denota y calcula así: $D_{\vec{u}}T(\mathcal{P}) = \nabla T(\mathcal{P}) \cdot \vec{u}$. En particular, cuando $\vec{u} = \vec{i}$ y $\vec{u} = \vec{j}$ y el producto punto se realiza componente a componente, tenemos que la derivada direccional deviene las derivadas parciales de T , en relación con x y y , respectivamente. Veamos:

$$D_{\vec{i}}T(\mathcal{P}) = \nabla T(\mathcal{P}) \cdot \vec{i} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(\mathcal{P})\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}(\mathcal{P})\vec{j} \right) \cdot \vec{i} = \frac{\partial T}{\partial x}(\mathcal{P});$$

$$D_{\vec{j}}T(\mathcal{P}) = \nabla T(\mathcal{P}) \cdot \vec{j} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(\mathcal{P})\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}(\mathcal{P})\vec{j} \right) \cdot \vec{j} = \frac{\partial T}{\partial y}(\mathcal{P}).$$

Esto dice que la derivada direccional es una extensión de la noción de derivada parcial y, por supuesto, de la derivada de una función de una variable. De hecho, la derivada direccional también indica la pendiente de una curva: si se toma un punto \mathcal{P} del plano y la dirección dada por \vec{u} , se puede construir la recta en el plano que pasa por ese punto y sigue a ese vector. Si se toma el plano que pasa por esa recta y que es perpendicular al xy , este plano genera una curva de corte al intersectar la gráfica de la función $T = T(x, y)$. La pendiente de esa curva en el punto correspondiente a \mathcal{P} es el valor de la derivada direccional.



Significado de la derivada direccional como la pendiente de la curva de corte de la superficie $T = T(x, y)$ con el plano perpendicular al plano xy que pasa por la línea que contiene al punto \mathcal{P} y está en la dirección de \vec{u} .

2. Cálculo de derivadas direccionales

En general, la derivada direccional de la función $z = f(x, y)$ en el punto $\mathcal{P}(a, b)$ del plano, en la dirección del vector unitario \vec{u} , se denota y calcula así: $D_{\vec{u}}f(\mathcal{P}) = \nabla f(\mathcal{P}) \cdot \vec{u}$. Se habla entonces de calcular *la derivada (direccional) de una función $z = f(x, y)$ en un punto $\mathcal{P}(a, b)$ en una dirección* (determinada por el vector unitario \vec{u}). Dada una función y un punto, podemos construir el gradiente y evaluarlo en el punto, obteniendo así un vector concreto (el vector gradiente correspondiente al punto). Ahora bien, señalar una dirección a partir del punto puede hacerse de distintas maneras; veremos

enseñada a través de un ejemplo cómo construir el vector unitario \vec{u} según la forma en que se indique la dirección.

Ejemplo. Calcula la derivada direccional de la función $z = f(x, y) = x^2y$ en el punto $\mathcal{P}(1, 2)$ para cada una de las siguientes direcciones.

- Dirección dada por el vector $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j}$
- Dirección hacia el punto $\mathcal{Q}(5, 7)$
- Dirección $\theta = \frac{\pi}{6}$

Adicionalmente, ¿cuál es la derivada direccional máxima y en qué dirección se logra obtener? ¿Cuál es la derivada direccional mínima y en qué dirección se logra obtener?

Solución. El gradiente de la función es

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j}.$$

En este caso $\nabla f(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$; al evaluarlo en $\mathcal{P}(1, 2)$ obtenemos: $\nabla f(1, 2) = 4\vec{i} + \vec{j}$. Calculemos, ahora el vector \vec{u} para cada dirección dada:

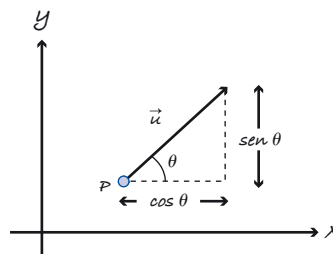
- Dividiendo el vector $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j}$ entre su magnitud obtenemos un vector unitario en la misma dirección que \vec{v} ; como la magnitud de \vec{v} es $|\vec{v}| = \sqrt{17}$, tenemos que:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j}.$$

- Tomemos el vector que conecta $\mathcal{P}(1, 2)$ con $\mathcal{Q}(5, 7)$, esto es, $\overrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$; dividiéndolo entre su magnitud $|\overrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}}|$ obtenemos \vec{u} :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}}}{|\overrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{Q}}|} = \frac{4\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{41}}\vec{j}.$$

- En general, dada la dirección mediante un ángulo, digamos θ , podemos construir el vector unitario así: $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$. En el siguiente dibujo puede apreciarse la dirección correspondiente al ángulo y el vector unitario en la misma dirección. Por ser \vec{u} unitario, sus componentes en las direcciones horizontal y vertical son $\cos \theta$ y $\sin \theta$, respectivamente.



Si $\theta = \frac{\pi}{6}$, el vector unitario es $\vec{u} = \cos \frac{\pi}{6} \vec{i} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \vec{j}$, o bien,

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}.$$

Calculamos ahora la derivada direccional para cada caso:

$$a) \mathcal{D}_{\vec{u}} f(\mathcal{P}) = \nabla f(\mathcal{P}) \cdot \vec{u} = (4\vec{i} + \vec{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{17}} \vec{i} + \frac{4}{\sqrt{17}} \vec{j} \right) = \frac{8}{\sqrt{17}} = 1.94$$

Esto significa que a partir de $\mathcal{P}(1, 2)$ los valores de la función crecen a un ritmo de 1.94 por cada unidad que se avance en la dirección indicada al iniciar el desplazamiento.

$$b) \mathcal{D}_{\vec{u}} f(\mathcal{P}) = \nabla f(\mathcal{P}) \cdot \vec{u} = (4\vec{i} + \vec{j}) \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{41}} \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{41}} \vec{j} \right) = \frac{21}{\sqrt{41}} = 3.27$$

$$c) \mathcal{D}_{\vec{u}} f(\mathcal{P}) = \nabla f(\mathcal{P}) \cdot \vec{u} = (4\vec{i} + \vec{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right) = \frac{4\sqrt{3} + 1}{2} = 3.964$$

Finalmente, la derivada direccional máxima en el punto $P(1, 2)$ es la magnitud del gradiente de la función en ese punto: $|\nabla f(1, 2)| = |4\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{17} = 4.123$. Este valor se alcanza siguiendo la dirección señalada por el gradiente, es decir, en dirección del vector: $\nabla f(1, 2) = 4\vec{i} + \vec{j}$.

La derivada direccional mínima es $-|\nabla f(1, 2)| = -4.123$ y se obtiene en la dirección opuesta al gradiente, indicada por el vector: $-\nabla f(1, 2) = -4\vec{i} - \vec{j}$.

3. Líneas del campo gradiente o curvas de máximo crecimiento para una función de dos variables

Imaginemos que la dirección dada por el recorrido de cada punto de una curva coincida con la del vector gradiente de una función en ese punto. En tanto que el gradiente indica la dirección donde se da la máxima razón de cambio de la función, esta curva tendría la propiedad de que al seguirla la función obtendría siempre el máximo crecimiento respecto al desplazamiento. Estas curvas existen y, de hecho, son las **líneas del campo gradiente de la función**; estas curvas son tales que el vector de desplazamiento infinitesimal en cada punto de la curva (al ser recorrida en algún sentido) es paralelo al vector gradiente del punto. Por supuesto que al recorrer una curva de máximo crecimiento en cierta dirección da el mayor crecimiento cada vez, pero al recorrerla en sentido contrario se tendrán los mayores decrementos de la función en cada punto del recorrido.

Enseguida señalamos dos contextos físicos donde se destaca la idea de las curvas de máximo crecimiento.

- a) *Temperatura y líneas de flujo de calor.* Si tenemos una distribución de temperatura en una superficie plana dada por la función $\tau = \tau(x, y)$, en cada punto de la superficie el calor fluye hacia donde se dé la mayor disminución de temperatura. Es decir, el calor fluye siguiendo la dirección contraria al vector gradiente. Las líneas de flujo de calor son las líneas del campo gradiente de la temperatura. La siguiente ecuación sintetiza lo que hemos afirmado: $\vec{h} = -k \nabla \tau$, donde \vec{h} representa el vector de flujo calorífico.

b) *Potencial electrostático y líneas del campo eléctrico.* El campo eléctrico \vec{E} en el espacio, generado por una carga puntual positiva q , es gradiente, como probaremos más adelante. La función potencial del campo eléctrico se define por

$$\varphi(x, y, z) = W(\mathcal{P}_o \rightarrow \mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}_o}^{(x, y, z)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Tomando a \mathcal{P}_o como un punto al infinito y cualquier trayectoria que conecte el punto \mathcal{P}_o con (x, y, z) .

Observemos que $d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ y que al calcular la derivada direccional $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\vec{E} \cdot d\vec{l}}{dl} = \vec{E} \cdot \frac{d\vec{l}}{dl} = |\vec{E}| \cos(\alpha)$ se observa que el valor máximo es la magnitud del campo eléctrico y la dirección para obtener ese máximo es la dirección del mismo campo, pero por la propiedad del gradiente, en cuanto a que su magnitud es el valor máximo de la derivada direccional y que esta derivada se alcanza precisamente en su dirección, se tiene que: $\nabla \varphi = \vec{E}$.



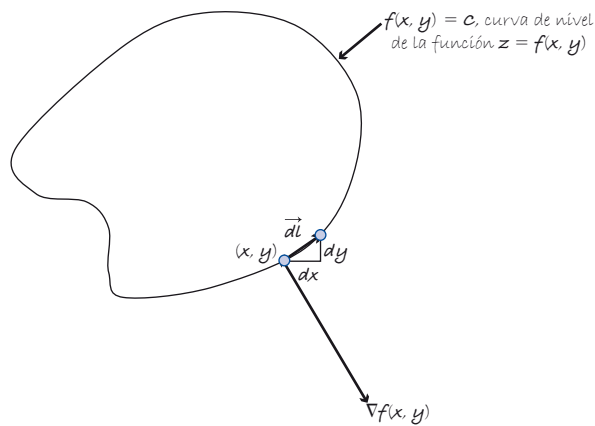
Es frecuente encontrar en los libros de Física la siguiente variante de la fórmula que hemos dado: $\nabla \varphi = -\vec{E}$.

La razón es que se considera el trabajo que debe realizar una carga unitaria positiva para vencer la fuerza eléctrica, es decir, para ir en contra de ella. Finalmente pensamos, como cualquier libro de Física también lo dice, que el signo es meramente convencional.

4. Curvas equipotenciales y líneas del campo gradiente

Consideremos la familia de curvas de nivel $f(x, y) = c$ de la función de dos variables $z = f(x, y)$. Tomemos una curva de esta familia y un punto (x, y) en la curva. Si se avanza sobre la curva un diferencial de longitud a partir del punto, entonces el incremento diferencial, o simplemente el diferencial de z , es 0, es decir, $dz = 0$, porque el valor de z se mantiene constante. Si dx y dy son los incrementos infinitesimales correspondientes al diferencial de longitud de la curva, entonces $dz = 0$ se puede escribir así: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = 0$, que a su vez podemos escribirlo así: $\nabla f(x, y) \cdot d\vec{l} = 0$, donde $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$. Como $\nabla f(x, y) \cdot d\vec{l} = |\nabla f(x, y)| |d\vec{l}| \cos \alpha = 0$, esto nos dice que los vectores gradiente y desplazamiento (que están sobre la curva de nivel) en (x, y) son perpendiculares (α es ángulo recto), por lo tanto, se tiene este importante resultado: *el campo gradiente es perpendicular a las curvas equipotenciales.*

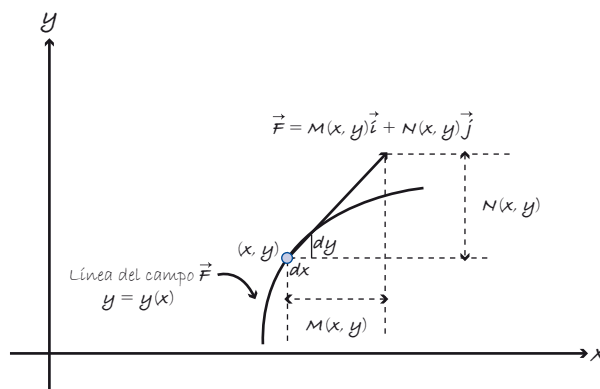
Observa que las curvas equipotenciales son las curvas de nivel de la función potencial $f(x, y)$ asociada al gradiente.



En cualquier punto (x, y) de la curva de nivel donde se coloca un vector $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ siguiendo la dirección de la misma, se tiene que $dz = 0$. Pero como $dz = \nabla f(x, y) \cdot d\vec{l}$, resulta que $\nabla f(x, y) \cdot d\vec{l} = 0$, de donde el vector $\nabla f(x, y)$ es perpendicular a $d\vec{l}$ y, en consecuencia, a la curva de nivel en el punto (x, y) .

Las **líneas de un campo vectorial**, en general, son aquellas que se forman “siguiendo” los vectores del campo. De modo más preciso, una línea de un campo es aquella en la que en cada punto el vector del campo es tangente a ella. Sobre estas líneas de campo tenemos los siguientes comentarios.

- a) Tomando el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$. Las líneas del campo forman una familia de curvas cuyas pendientes están dadas por la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)}$, como puede apreciarse en la siguiente figura.

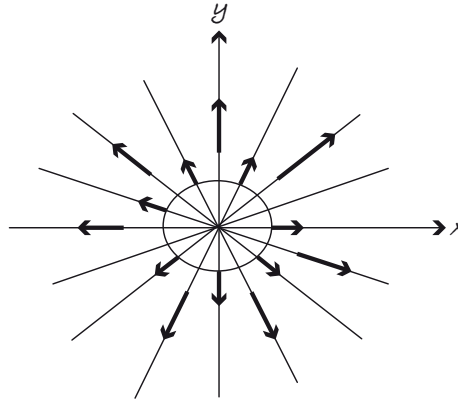


Si se resuelve esta ecuación diferencial, se puede encontrar una fórmula explícita, que relaciona a x con y , para la familia de las líneas del campo.

Solo para ilustrar consideremos el siguiente ejemplo: tomemos el campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, en este caso $M(x, y) = x$ y $N(x, y) = y$ y, por lo tanto, las pendientes de las líneas del campo son $\frac{dy}{dx} = \frac{N(x, y)}{M(x, y)} = \frac{y}{x}$, es decir, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

Resolvamos esta ecuación diferencial por separación de variables:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln y = \ln x + c$, aplicando exponenciales a ambos lados se tiene $y = e^c x \rightarrow y = kx$. Esto nos dice que la familia de las líneas del campo \vec{F} la forman todas las rectas que pasan por el origen. Este resultado en particular dice que este campo, llamado campo de vectores de posición, es radial, es decir, sigue los radios que parten del origen.



Líneas del campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$

- b) En caso de que un campo sea gradiente, las líneas del campo, al seguir los gradientes y estos cruzar perpendicularmente a las curvas equipotenciales, se tiene que: *las líneas de un campo gradiente son perpendiculares a las curvas equipotenciales.*

Si \vec{F} es un campo gradiente y φ su función potencial, es decir,

$\vec{F} = \nabla\varphi(x, y)\vec{i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)\vec{j}$, las pendientes de las líneas del

campo están dadas por $m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)}$.

Por otra parte, las curvas equipotenciales $\varphi(x, y) = c$ cumplen la ecuación diferencial

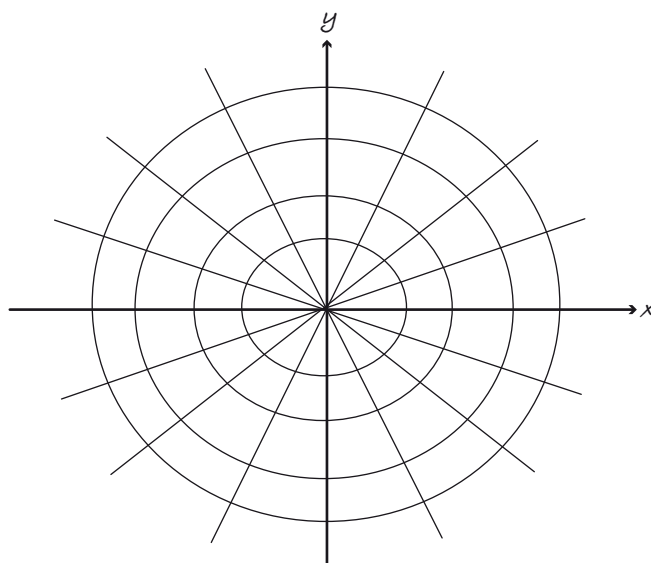
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)dy = 0,$$

de donde obtenemos que las pendientes de las curvas equipotenciales están dadas por:

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)}.$$

Observemos que m_1 y m_2 son “recíprocas y de signo contrario”, y que $m_1 m_2 = -1$ concuerda con la afirmación que hicimos de que la familia de equipotenciales es ortogonal a la familia de las líneas del campo.

Volvamos a considerar el campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$; se puede comprobar (te invitamos a hacerlo) que este es un campo gradiente y que la familia de curvas equipotenciales está dada por la fórmula $x^2 + y^2 = c$ y la constituyen todas las circunferencias con centro en el origen. La siguiente figura ilustra la relación de perpendicularidad entre las curvas equipotenciales y las líneas de este campo.



Líneas del campo $\vec{F} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ y sus curvas equipotenciales.

5. Cálculos especiales de la integral de línea

La idea de que un campo “sigue” una curva o que es perpendicular a otra puede facilitar el cálculo de una integral de línea. Veamos.

Consideremos de nuevo la integral de línea $\tau = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$, donde

$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ es un vector de magnitud infinitesimal a lo largo de la curva y con determinada dirección. Ya que $\vec{F} \cdot d\vec{l} = |\vec{F}||d\vec{l}|\cos \alpha$, donde α es el ángulo entre \vec{F} y $d\vec{l}$, por lo tanto, entre $d\vec{l}$ y la curva existen situaciones especiales relacionadas con la posición de \vec{F} respecto a la curva C en las que la integral puede ser un cálculo fácil, o bien, sin necesidad de aplicar alguna de las formas anteriores que hemos visto para calcularla. Estas situaciones en realidad no son extrañas, de hecho aparecen en circunstancias típicas de la electricidad y el magnetismo, como veremos más adelante. Veamos por lo pronto estas situaciones especiales.

a) Consideremos el caso especial en que \vec{F} es de magnitud constante y siempre tangente a la curva C ; esto es, en cada punto de la trayectoria el vector del campo \vec{F} está en la dirección del vector de desplazamiento infinitesimal correspondiente $d\vec{l}$. Si α es el ángulo entre estos vectores, tenemos que $\alpha = 0$ a lo largo de la curva C . En este caso tenemos:

$$w = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_C |\vec{F}||d\vec{l}|\cos 0$$

Sea $dl = |d\vec{l}|$ la magnitud del vector desplazamiento; como $|\vec{F}|$ es constante y, por lo tanto, puede salir de la integral, esta se transforma en $w = |\vec{F}|\int_C dl$ (recordemos que $\cos(0) = 1$).

Es fácil reconocer que $\int_C dl = l$ es la longitud de la curva C . Por ende, en este caso la integral resulta ser:

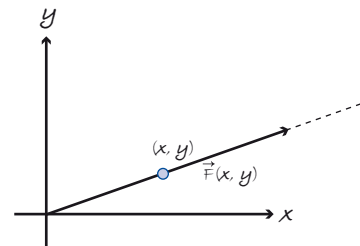
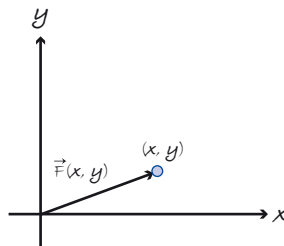
$$w = |\vec{F}|l.$$

Utilizaremos este resultado en la consideración 6, donde calcularemos el trabajo realizado por el campo magnético generado por una línea de corriente a lo largo de un círculo C con centro en la línea de corriente y perpendicular a ella.

- b) Consideremos ahora el caso en que \vec{F} es normal o perpendicular a la trayectoria C en todo punto de ella; en este caso, $\vec{F} \cdot d\vec{l} = |\vec{F}| |d\vec{l}| \cos(90^\circ) = 0$ y, por lo tanto, la integral de línea es 0. Es inmediato que si \vec{F} es gradiente y C es una curva equipotencial (o es una parte de ella), entonces la integral de línea es 0 porque el campo gradiente es perpendicular a las curvas equipotenciales.

Antes de aplicar estos resultados en el área de la electricidad y el magnetismo, veamos los siguientes ejemplos.

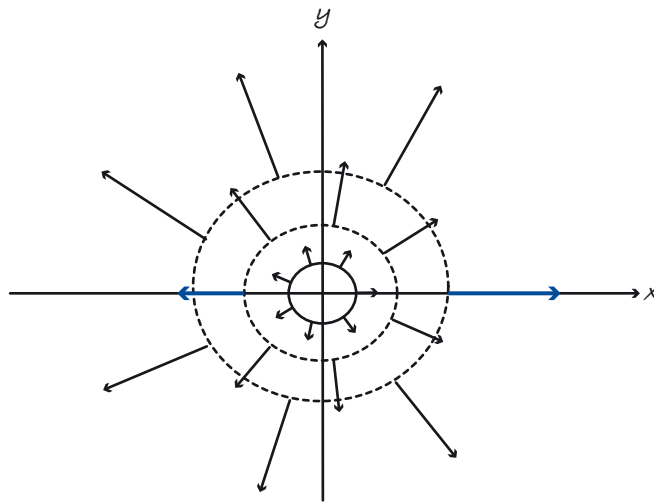
Ejemplo 1. Consideremos el campo de vectores $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$; si el vector $\vec{F}(x, y)$ se coloca en el origen, es decir, con punto inicial en $(0, 0)$, el extremo final del vector coincide con el punto (x, y) . Por ello este vector $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ se llama vector de posición del punto (x, y) . Ahora, si el mismo vector se coloca con punto inicial en (x, y) , es fácil apreciar que queda en posición radial respecto al origen; esto es, el vector $\vec{F}(x, y)$ se empalma con la recta que pasa por el origen y el punto (x, y) .



La magnitud del vector $\vec{F}(x, y)$ es $|\vec{F}(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces podemos afirmar que:

- i) En los puntos (x, y) de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el vector $\vec{F}(x, y)$ es radial con magnitud 1.
- ii) En los puntos (x, y) de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, el vector $\vec{F}(x, y)$ es radial con magnitud 2.
- iii) En los puntos (x, y) de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, el vector $\vec{F}(x, y)$ es radial con magnitud 3.

Y en general, en cualquier punto (x, y) de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, el vector $\vec{F}(x, y)$ es radial con magnitud r (precisamente, la distancia de (x, y) al origen). La imagen de este campo de vectores en el plano xy es la de vectores radiales de igual magnitud en una circunferencia con centro en el origen y con magnitudes cada vez mayores a medida que el radio de la circunferencia aumenta, como se aprecia en la siguiente figura.



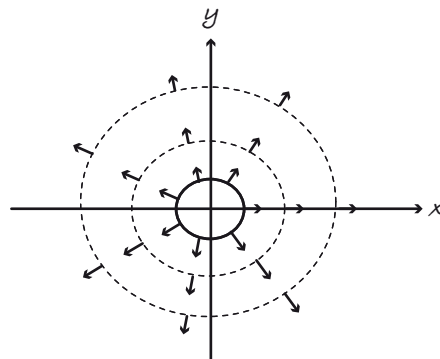
Dibujo del campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Si C es cualquier circunferencia con centro en el origen (de hecho, una curva equipotencial, como vimos en el punto anterior) los vectores del campo son perpendiculares a lo largo de ella y, por lo considerado en el inciso b), la integral de línea $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$ es cero, esto es $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$.

Recordemos que el pequeño círculo colocado sobre el símbolo de integral anterior indica que la integración se lleva a cabo a lo largo de una curva cerrada (esto es, que empieza y termina en un mismo punto) como lo es la circunferencia C en nuestro ejemplo.

Ejemplo 2. Consideremos al campo $\vec{u}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, el cual se obtiene dividiendo al campo anterior entre su propia magnitud.

Observemos que los vectores de este campo llevan la misma dirección que los vectores de posición de los puntos del plano (campo \vec{F} del ejemplo 1), solo que la magnitud es ahora constante, y de hecho, 1 , como se ilustra en la siguiente figura.

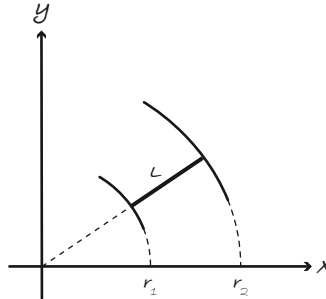


Dibujo del campo $\vec{u}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Para este campo se tiene también que:

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ donde } C \text{ es cualquier circunferencia con centro en el origen.}$$

Si consideramos ahora a un segmento radial L entre los círculos de radios r_1 y r_2 , donde $r_1 < r_2$,



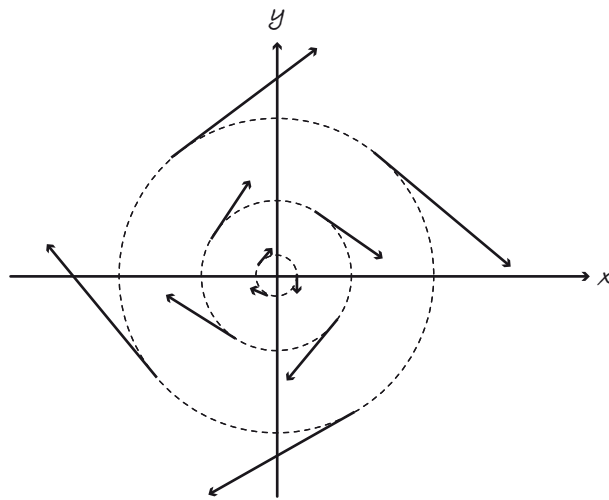
vemos que a lo largo de este segmento el campo \vec{u} está en la misma dirección que L y, como tiene magnitud constante, podemos calcular la integral de línea $\int_L \vec{u} \cdot d\vec{l}$ aplicando el resultado del inciso a); es decir,

$$\int_L \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_L |\vec{u}| dl \cos(0) = \int_L l dl = \int_L dl = r_2 - r_1.$$

Ejemplo 3. Consideremos ahora al campo de vectores $\vec{G}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$; en cada punto (x, y) del plano, el vector $\vec{F}(x, y)$ del ejemplo 1 y el vector $\vec{G}(x, y)$ son perpendiculares, ya que su producto punto se anula, es decir, $\vec{F}(x, y) \cdot \vec{G}(x, y) = 0$. Esto nos indica que mientras en una circunferencia con centro en el origen los vectores del campo $\vec{F}(x, y)$ son radiales, los vectores del campo $\vec{G}(x, y)$ son circulares, es decir, son tangentes a la circunferencia. Además, sobre una misma circunferencia los vectores $\vec{G}(x, y)$ son de magnitud constante ya que $|\vec{G}(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La imagen de este campo en el plano xy es la de vectores circulares con igual magnitud en una circunferencia con centro en el origen y con magnitudes cada vez mayores a medida que el radio de la circunferencia aumenta. La figura de la página siguiente ilustra la disposición de los vectores de este campo.

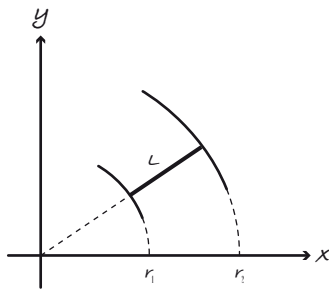
Si C es cualquier circunferencia con centro en el origen y radio r , los vectores del campo \vec{G} sobre los puntos de la circunferencia son tangentes a lo largo de esta, como ya lo hemos visto; pero además, van en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj (¿por qué?). Como la magnitud del campo también es constante, de hecho tiene el valor r a lo largo de la circunferencia, tenemos, por lo considerado en el inciso a), que la integral de línea $\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{l}$ en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj está dada por:

$$\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{l} = \oint_C |\vec{G}| dl \cos(0) = \oint_C r dl = r \oint_C dl = r(2\pi r) = 2\pi r^2.$$



Dibujo del campo $\vec{G}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$.

Si consideramos de nuevo al segmento radial \mathcal{L} entre los círculos de radios r_1 y r_2 , donde $r_1 < r_2$,



vemos que los vectores del campo \vec{G} son perpendiculares a lo largo de este y, por lo considerado en el inciso b), la integral de línea $\int_{\mathcal{L}} \vec{G} \cdot d\vec{l}$ es cero.

6. Modelado de los campos eléctrico y magnético

Los campos radiales y circulares, como los tratados en el punto anterior, sirven para modelar matemáticamente el campo eléctrico que genera una carga puntual y el campo magnético generado por una línea de corriente eléctrica.

- a) *El campo eléctrico.* A una carga eléctrica confinada en un pequeño espacio se le llama **carga puntual**. Toda carga puntual de q coulombs genera un campo eléctrico a su alrededor; este campo se manifiesta con la presencia de cuerpos cargados eléctricamente, los cuales se someten a la fuerza de atracción o repulsión de la carga puntual según sea el signo de las cargas.

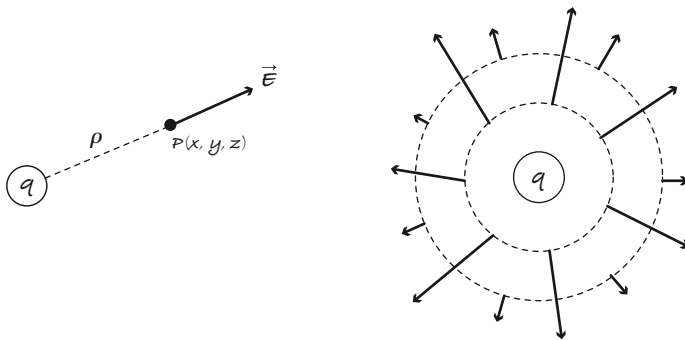
Veamos cómo se modela el campo eléctrico que genera una carga puntual de q coulombs; supongamos que $q > 0$ para ser más concretos y que la carga se coloca en el origen de un sistema coordenado cartesiano.

Sea $\mathcal{P}(x, y, z)$ un punto colocado a una distancia ρ de la carga; su vector de posición es $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, y si dividimos este vector entre su magnitud ρ , donde $\rho = |\vec{\rho}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tenemos que $\frac{\vec{\rho}}{\rho}$ es un vector unitario en dirección de $\vec{\rho}$.

El campo eléctrico \vec{E} en $\mathcal{P}(x, y, z)$ debido a la carga q es la fuerza eléctrica con la que la carga q repele a una carga de un coulomb positivo colocada en $\mathcal{P}(x, y, z)$ y está dada según la ley de Coulomb por la siguiente fórmula:

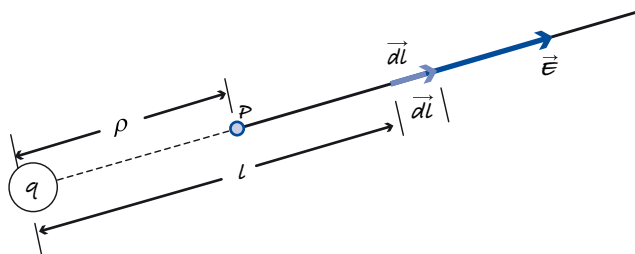
$$\vec{E}(x, y, z) = k \frac{q \vec{\rho}}{\rho^2 \rho} = \frac{kq}{\rho^3} \vec{\rho} = kq \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Recordemos que la ley de Coulomb afirma que la fuerza con la que dos cargas puntuales se atraen o se repelen (según sea el signo de las cargas) está en la dirección de la recta que las une, y su valor es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia.



Es decir, la magnitud del campo eléctrico \vec{E} en un punto es $\frac{kq}{\rho^2}$, donde k es una constante y ρ es la distancia del punto al origen (lugar donde está colocada la carga q), además va en dirección del vector posición del punto, o dicho de otra forma, es radial hacia afuera. Conviene observar que en puntos que estén a una misma distancia al origen; es decir, que tienen la misma ρ (formando una esfera de radio ρ), el campo tiene la misma magnitud, de ahí la representación gráfica que hacemos del campo \vec{E} en la figura superior.

Calculemos ahora el trabajo \mathcal{W} desde un punto $\mathcal{P}(x, y, z)$ que está a una distancia ρ de la carga hasta el infinito a lo largo de la recta radial \mathcal{L} que pasa por \mathcal{P} y el origen:



Notemos que en un punto arbitrario de la recta radial que está a una distancia l de la carga, el vector de desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ a lo largo de L y el vector del campo eléctrico \vec{E} están en la misma dirección, por lo que

$$\int_{\rho}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\rho}^{\infty} |\vec{E}| dl \cos(\theta) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{kq}{l^2} dl = \frac{kq}{\rho} = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

En consecuencia, el trabajo en dirección contraria, es decir, desde el infinito hasta el punto P a través de la recta radial, sería

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Esta última función es muy importante ya que podemos afirmar que el campo eléctrico \vec{E} es un campo gradiente y que la función potencial del mismo es precisamente esta función

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Si escribimos el campo eléctrico de la forma $\vec{E}(x, y, z) = \frac{kqx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{i} + \frac{kqy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{j} + \frac{kqz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$, la afirmación que hacemos se puede comprobar viendo que $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \vec{E}$; es decir, verificando que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{kqx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{kqy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{kqz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Te invitamos a hacer estas comprobaciones; de hecho, en el problema 9 de la Tarea 8 se te pide explícitamente que lo hagas, aunque en aquel caso el campo eléctrico se considera definido en el plano más que en el espacio tridimensional.

Finalmente, en este punto queremos calcular el trabajo que se realiza considerando este campo eléctrico a lo largo de ciertos círculos que describiremos a continuación.

Consideremos una esfera con centro en el origen o punto donde se ha colocado la carga eléctrica. Cortemos la esfera con un plano que pase por el origen, la curva de corte es una circunferencia. Afirmamos que el trabajo del campo eléctrico a lo largo de esta circunferencia es 0. La razón es simple: como el campo eléctrico es perpendicular (al ser radial) a la esfera, lo es en cada punto de la circunferencia, y así podemos utilizar el cálculo especial del inciso b) del punto anterior que nos dice que, en efecto, bajo esta circunstancia, el trabajo es 0.

- b) *El campo magnético de una línea de corriente.* Consideremos ahora al campo magnético generado por una línea de corriente eléctrica de intensidad I coulombs por segundo, a lo largo de una recta infinita.

Si tomamos un punto de la recta infinita que modela la línea de corriente y colocamos un plano xy con el origen en el punto y perpendicular a la línea, el campo magnético en el punto $P(x, y)$ generado por la corriente que pasa por la línea, está dada por la fórmula

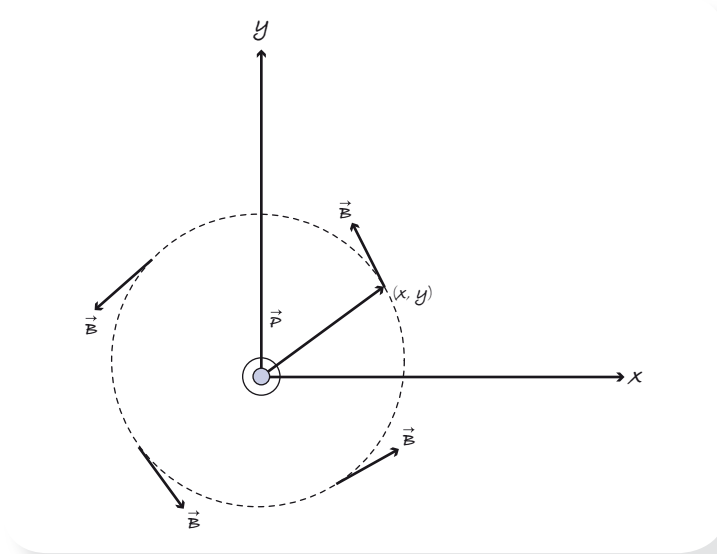
$$\vec{B}(x, y) = kI \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r^2} = kI \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}.$$

donde I es la intensidad de la corriente que suponemos constante, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del punto (x, y) al origen (o a la línea) y k es una constante. Veamos algunas características de este campo.

- i) La magnitud de este campo es $|\vec{B}(x, y)| = \frac{kI}{r}$ (te invitamos a comprobarlo); esto dice que los puntos que están a la misma distancia (en una misma circunferencia con centro en la línea) tienen un campo magnético de la misma magnitud. Además, dice que esta magnitud es inversamente proporcional a la distancia del punto al origen (*grosso modo*: a mayor distancia, menor magnitud del campo magnético).
- ii) El campo magnético \vec{B} es perpendicular al campo de los vectores de posición, esto es, al campo $\vec{P}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. Esto puede comprobarse efectuando el producto punto entre estos dos campos y observar que el resultado es 0. Veamos.

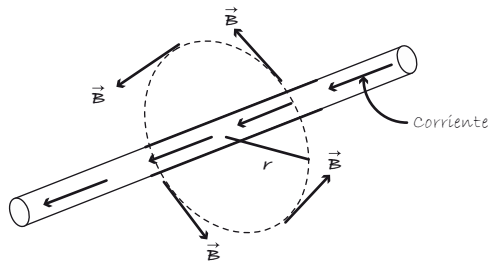
Observemos que \vec{B} puede escribirse de la forma $\vec{B}(x, y) = -\frac{kI}{r^2}y\vec{i} + \frac{kI}{r^2}x\vec{j}$.

Por lo tanto, $\vec{B} \cdot \vec{P} = \left(-\frac{kI}{r^2}y\vec{i} + \frac{kI}{r^2}x\vec{j}\right) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = -\frac{kI}{r^2}yx + \frac{kI}{r^2}xy = 0$.

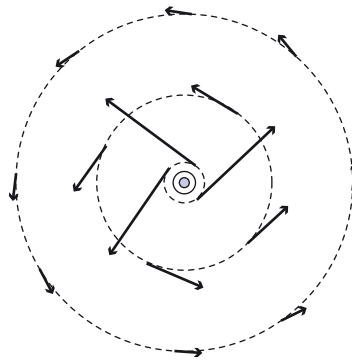


Si \vec{B} es perpendicular a los vectores de posición y estos son radiales, entonces los vectores del campo magnético \vec{B} son tangentes a los círculos con centro en el origen.

Las características del campo magnético señaladas en i) y ii) son ilustradas en los siguientes dibujos:



Campo magnético en los puntos de un círculo con centro en la línea de corriente.



En esta vista del campo magnético, la línea de corriente es perpendicular a la hoja de papel donde está el dibujo, y la corriente se desplaza hacia el frente.

Cabe aclarar que el sentido en que están colocados los vectores del campo magnético en el dibujo, concuerda con la dirección en que se mueve la corriente, y esto puede ser explicado con la regla de la física llamada “regla de la mano derecha”.

Calculemos ahora la integral de línea del campo magnético \vec{B} a lo largo de toda una circunferencia de radio R con centro en la línea de la corriente y colocada en un plano perpendicular a la misma línea siguiendo la dirección que indican los vectores del campo. Esta magnitud corresponde a lo que se llama **circulación** del campo magnético.

Con las características que hemos exhibido en los incisos *i*) y *ii*), tenemos que la magnitud del campo es constante, y su valor es $\frac{I}{R}$ en todos los puntos de la circunferencia. Además, este campo es tangente a esta curva en cada punto de ella.

Procediendo como lo hicimos en el inciso *a*) de la “Consideración 5. Cálculos especiales de la integral de línea”, tenemos que:

$$\tau = \int_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_c |\vec{B}| dl \cos(0) = |\vec{B}| \int dl = |\vec{B}| \cdot \text{longitud de la circunferencia} = \frac{kI}{R} = 2\pi kI$$

Como puede verse, esta magnitud tiene un valor que no depende del radio R de la circunferencia. Esto se debe a que la magnitud del campo disminuye a medida que tomamos circunferencias con radios cada vez mayores. Ambos se compensan mutuamente.

También se aprecia que la circulación del campo magnético es proporcional a la intensidad I de la corriente, con lo que hemos comprobado, en este caso, la **ley de Ampere**, que asegura que en un lazo cerrado, la circulación del campo magnético es proporcional a la intensidad I de la corriente que pasa por el interior del lazo.

7. Las familias de curvas ortogonales y los sistemas de coordenadas

Al margen de contextos físicos, una función de dos variables tiene asociadas dos familias de curvas ortogonales (en cada punto, la intersección entre dos curvas, una de cada familia, se da en ángulos rectos): la *familia de curvas de nivel* y la *familia de curvas de máximo crecimiento*. Otra manera de ver este par de familias ortogonales es: la *familia de curvas de nivel* y la *familia de las líneas del campo gradiente de la*

función. El siguiente ejemplo nos permite revisar algunas ideas que hemos discutido en los puntos anteriores respecto a estas familias de curvas ortogonales.

Terminaremos este punto con una aplicación muy interesante que contextualiza los resultados obtenidos en la situación tratada.

Ejemplo. Consideremos la función $z = f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$.

a) *La ecuación de la familia de curvas de nivel de la función.*

La ecuación correspondiente a la familia de curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$ es, en general, $f(x, y) = c$; en este caso tenemos $16 - x^2 - 2y^2 = c$, que puede ponerse de la forma

$$x^2 + 2y^2 = c.$$

Cambiando el signo y unificando las constantes en una sola, ¿qué tipo de curvas son? Estas curvas son elipses, con los ejes mayor y menor sobre los ejes coordenados.

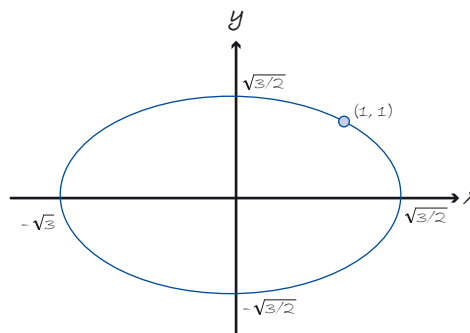
b) *La ecuación de la curva de nivel que pasa por el punto $P(1, 1)$.*

Se consigue ajustando el valor de la constante en la ecuación general:

$$x^2 + 2y^2 = c.$$

El valor de c debe ser 3, que se consigue sustituyendo $x = 1$ y $y = 1$ en la ecuación $x^2 + 2y^2 = c$; es decir, la ecuación es $x^2 + 2y^2 = 3$.

Enseguida presentamos la gráfica de la elipse correspondiente a la ecuación $x^2 + 2y^2 = 3$.



c) *La ecuación de la familia de curvas ortogonales a las de nivel (las líneas del campo gradiente).*

La idea básica es construir primero la ecuación diferencial de estas curvas y luego resolverla para obtener lo que se pide. Ahora bien, la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales puede obtenerse utilizando cualquiera de los dos métodos que se indican. Por supuesto, se debe llegar al mismo resultado:

Método 1. Obtener el campo gradiente de la función dada y tomar las pendientes de sus líneas de campo.

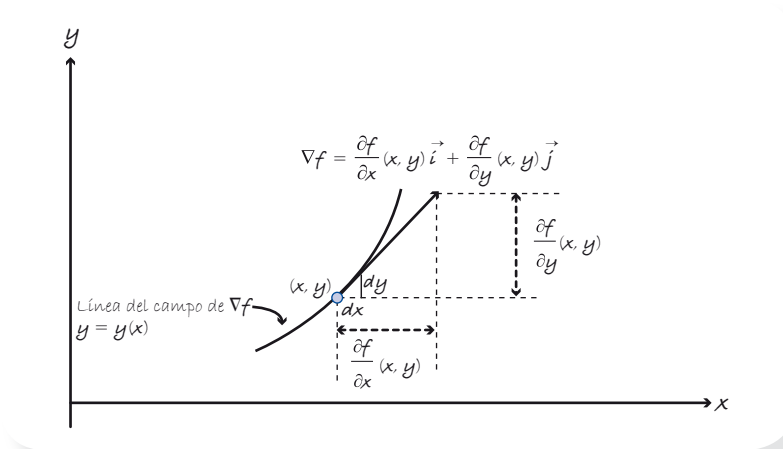
Método 2. Construir la ecuación diferencial exacta de la familia de curvas de nivel de $f(x, y)$, de ahí despejar $\frac{dy}{dx}$ (que resultan ser las pendientes de las curvas de nivel) y utilizar la perpendicularidad entre curvas para obtener $\frac{dy}{dx}$ de las ortogonales tomando el recíproco y con signo contrario de las pendientes anteriores.

Obtengamos ahora la **ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales** a la familia de las curvas de nivel que tenemos, utilizando los métodos que se indican:

Aplicación del método 1. A partir del campo gradiente de la función.

El campo gradiente de $z = f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ es $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j} = -2x\vec{i} - 4y\vec{j}$, por lo tanto, las pendientes de las líneas del campo gradiente, que son las curvas de máximo crecimiento y ortogonales a las de nivel, son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{-4y}{-2x}, \quad \text{o sea:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$



Aplicación del método 2. Tomando el recíproco y de signo contrario de las pendientes de las curvas de nivel.

La ecuación de las curvas de nivel es $x^2 + 2y^2 = c$, por lo tanto, su ecuación diferencial es (tomando diferenciales totales en ambos lados de la ecuación):

$2xdx + 4ydy = 0$; despejando $\frac{dy}{dx}$ se tiene que: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{4y}$; es decir, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$.

Entonces las pendientes $\frac{dy}{dx}$ de las curvas ortogonales son recíprocas y de signo contrario a las pendientes de las curvas de nivel; o sea, $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ es la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales.

Observemos que obtuvimos la misma ecuación diferencial con ambos procedimientos.

Si resolvemos esta ecuación diferencial, encontraremos la ecuación (sin diferenciales, por supuesto) de la familia de curvas ortogonales a las de nivel. La resolveremos utilizando el método de separación de variables.

De la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ se tiene que $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$.

Integrando en ambos lados, se obtiene $\ln y = 2 \ln x + \ln c$, donde se ha agregado una constante puesta en forma conveniente para aprovechar las propiedades de los logaritmos. Esta última ecuación puede reescribirse así: $\ln y = \ln (cx^2)$ y, aplicando exponenciales a ambos lados, se tiene que $y = cx^2$. Luego, la ecuación de la familia de curvas ortogonales es:

$$y = cx^2.$$

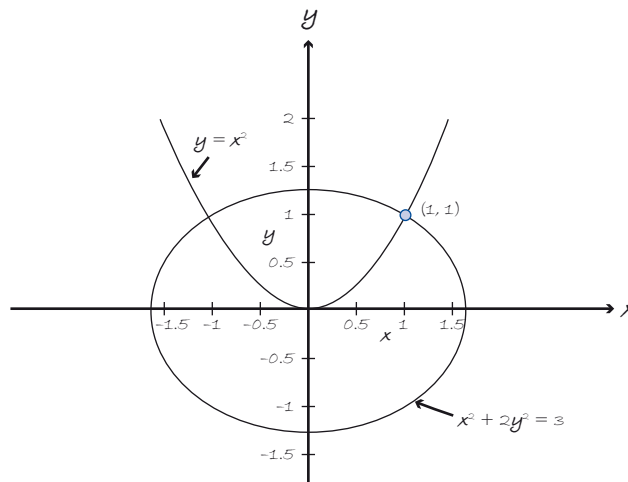
Esta corresponde a la familia de todas las parábolas verticales que tienen su vértice en el origen.

d) Ecuación de la curva ortogonal que pasa por el punto $P(1, 1)$.

Sustituyendo $x = 1$ y $y = 1$ en la ecuación $y = cx^2$ se tiene que c debe ser 1; o sea, la curva ortogonal que pasa por $P(1, 1)$ es la parábola con ecuación

$$y = x^2.$$

e) Gráficas en un mismo plano coordenado de la curva de nivel y la curva ortogonal que pasan por el punto $P(1, 1)$.



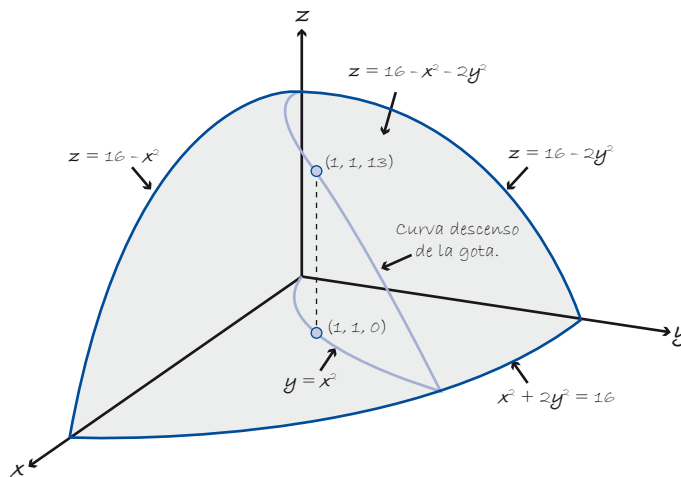
f) Contextualizando el ejemplo.

En este inciso consideraremos un problema de cinemática que puede ser resuelto tomando en cuenta la curva ortogonal que encontramos en los incisos anteriores. El problema es el siguiente: imaginemos que la gráfica de la función $z = f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ es una superficie donde gotas de agua pueden deslizarse sin fricción. Supongamos que en el punto de la superficie $\mathcal{Q}(1, 1, 13)$ se coloca una gota de agua, ¿qué trayectoria seguirá la gota de agua en su descenso sobre la superficie?

Aceptemos un principio de la Física, el de mínima acción, que dice que la gota de agua seguirá el camino por el que el descenso sea más rápido.

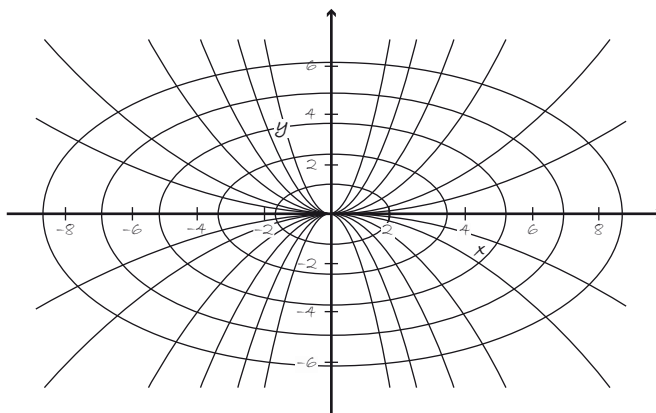
Observemos que el punto $\mathcal{Q}(1, 1, 13)$ se proyecta al plano xy en el punto $P(1, 1)$. Cualquier trayectoria en la superficie que pase por \mathcal{Q} se proyecta en

una curva en el plano xy que pasa por \mathcal{P} . En particular, la trayectoria de la gota de agua, la de más rápido descenso, proyectará una curva en el plano que al seguirla se consigue siempre el mayor decrecimiento de los valores correspondientes de la función $f(x, y)$, es decir, de las alturas. Por lo tanto, la trayectoria de la gota de agua en la superficie es proyectada en una curva sobre el plano xy que debe ser ortogonal a las curvas de nivel. La curva de máximo crecimiento obtenida correspondiente al punto $\mathcal{P}(1, 1)$ en la discusión de la SP-13, es $y = x^2$. Si por cada punto de esta parábola colocamos el punto correspondiente en la gráfica de la función $z = f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$, obtendremos la trayectoria solicitada. También se puede visualizar como la curva de corte entre la gráfica de la función y el “cilindro” que corresponde a la gráfica de $y = x^2$. Ve el siguiente dibujo.



8. Sistemas de coordenadas ortogonales

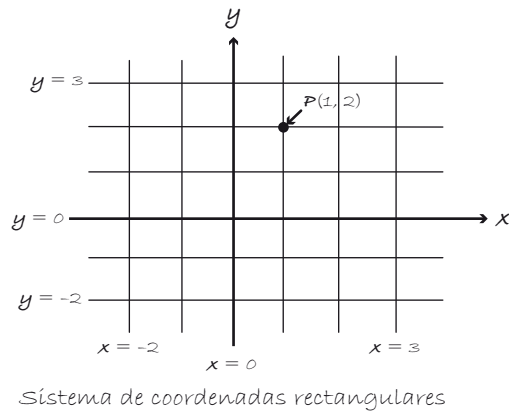
Dibujemos algunas curvas de nivel y algunas ortogonales de las familias correspondientes obtenidas en el punto anterior.



Elipses de la familia $x^2 + 2y^2 = c$ y parábolas de la familia $y = cx^2$. Cada elipse y cada parábola forman un ángulo recto cuando se intersecan, cada familia de curvas es ortogonal a la otra.

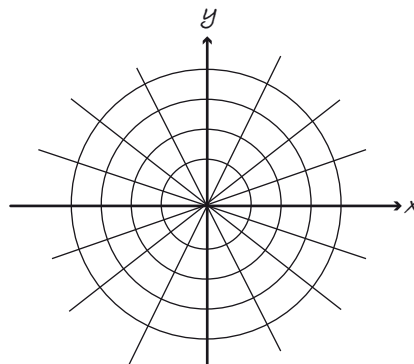
A excepción del origen, cada punto del plano pertenece solo a una curva de cada familia. Si tuviéramos una enumeración para cada familia de curvas, una especie de etiqueta para las curvas de cada familia, se tendría un modo diferente al sistema coordenado rectangular o cartesiano de ubicar los puntos del plano: se diría, por ejemplo, que ese punto está en tal curva de nivel y en esta ortogonal. Este es el principio básico de las coordenadas en el plano: dar dos familias de curvas en las que cada punto pertenezca solo a una de cada familia; en particular, si estas familias son ortogonales, estamos con sistemas coordenados ortogonales.

El sistema cartesiano está caracterizado por las familias de “curvas” ortogonales dadas por las ecuaciones: $x = c_1$ y $y = c_2$ (rectas verticales y horizontales, respectivamente). Decir en este sistema que el punto P tiene coordenadas $(1, 2)$ equivale a decir que el punto P está en la intersección de las curvas (rectas en este caso) ortogonales $x = 1$ y $y = 2$. Observa el siguiente dibujo.



9. Coordenadas polares

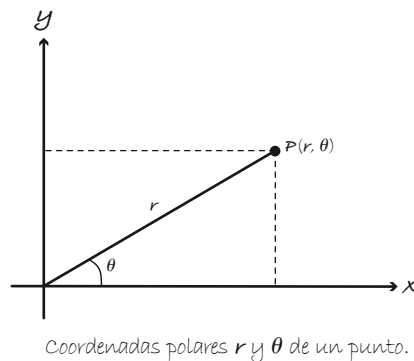
Retomamos el campo de los vectores de posición de los puntos del plano, $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. Es fácil verificar que este campo es gradiente y que proviene de la función potencial $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Cada vector del campo es radial, por lo que las líneas del campo son las rectas que pasan por el origen. Por su parte, las curvas equipotenciales tienen como ecuación $x^2 + y^2 = c$ y corresponden a circunferencias con centro en el origen. Esto se ilustra en la siguiente figura:



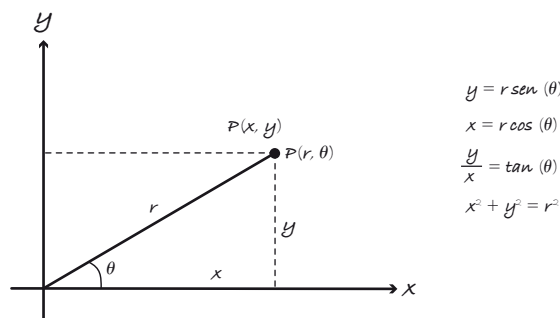
Líneas del campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ y sus curvas equipotenciales.

Estas familias de curvas ortogonales, las líneas rectas que pasan por el origen y las circunferencias con centro en el origen, son la base del sistema de las coordenadas polares. Este sistema de coordenadas es muy importante en la Física ya que muchos fenómenos pueden describirse y entenderse fácilmente con este tipo de coordenadas. Enseguida presentamos los elementos básicos de las coordenadas polares y después describiremos el campo eléctrico y el magnético con estas coordenadas.

Cada punto P del plano (excluyendo el origen) es la intersección de una de esas rectas y una de esas circunferencias. Ubicar un punto del plano con coordenadas polares consiste en precisar cuál es la recta y la circunferencia a las que pertenece. Las rectas que pasan por el origen son “etiquetadas” por medio de los ángulos que forman con una recta de referencia que comúnmente se toma como el eje x ; las circunferencias se etiquetan por medio de sus radios. Dado un punto P del plano se puede establecer sus coordenadas polares tomando el radio r de la circunferencia a la cual pertenece y que corresponde a la distancia de P al origen, y el ángulo θ que se forma con el eje x positivo y el segmento de recta a la cual pertenece P y que lo une con el origen (este ángulo se mide en radianes y en sentido contrario a las manecillas del reloj). Entonces el punto P en coordenadas polares se escribe así: $P(r, \theta)$.



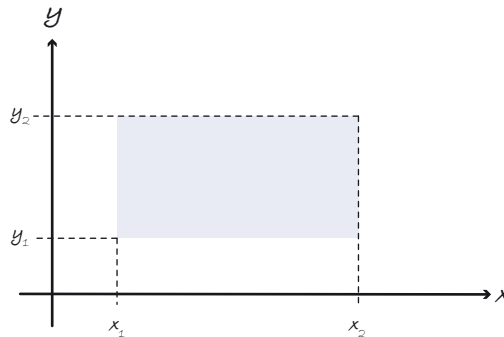
Se pueden determinar ecuaciones que relacionen las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas de un punto en el plano; esto nos permitirá pasar de un sistema de representación a otro; es decir, dadas las coordenadas cartesianas del punto P se pueden encontrar sus respectivas coordenadas polares, y viceversa. Estas ecuaciones se pueden determinar analizando la figura siguiente.



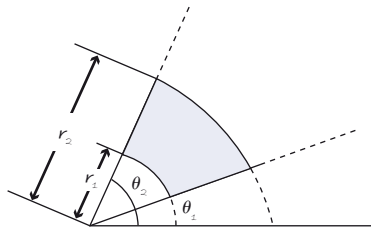
Ecuaciones que relacionan coordenadas cartesianas y polares de un punto.

Así como en el sistema cartesiano las rectas verticales y las horizontales, que son la base de este sistema de coordenadas, tienen asociadas las ecuaciones más simples, por así decirlo, $x = c_1$ y $y = c_2$, con las coordenadas polares los dos sistemas de curvas base tienen las ecuaciones más simples en términos de las nuevas variables: $r = c_1$ para las circunferencias con centro en el origen y $\theta = c_2$ para las rectas que pasan por el origen.

El sistema de dos desigualdades en coordenadas cartesianas, $x_1 \leq x \leq x_2$ y $y_1 \leq y \leq y_2$, tiene como gráfica el rectángulo que se ilustra en la siguiente figura.



En coordenadas polares, los puntos que satisfacen el sistema de desigualdades: $r_1 \leq r \leq r_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ forman un sector de un anillo (sector anular) cuyo dibujo mostramos enseguida.



10. Campos vectoriales en coordenadas polares

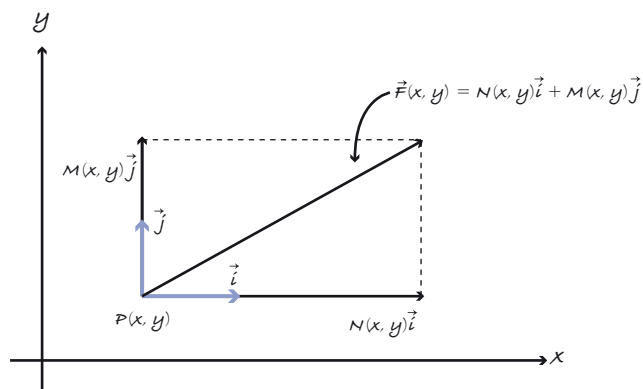
Un campo vectorial asigna un vector en cada punto del plano; en coordenadas cartesianas, un campo vectorial se escribe, en forma general, de la siguiente manera:

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}.$$

Con el propósito de comprender la forma en que un campo vectorial puede expresarse en coordenadas polares, conviene revisar algunos aspectos involucrados en la expresión dada con coordenadas cartesianas.

Coloquemos en el punto $P(x, y)$ el vector $\vec{F}(x, y)$; este vector se puede descomponer en los vectores $M(x, y)\vec{i}$ y $N(x, y)\vec{j}$, estos vectores son múltiplos respectivos de los vectores unitarios \vec{i} y \vec{j} (los múltiplos $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son números reales que dependen de las coordenadas (x, y) del punto P). El punto P es la intersección de dos

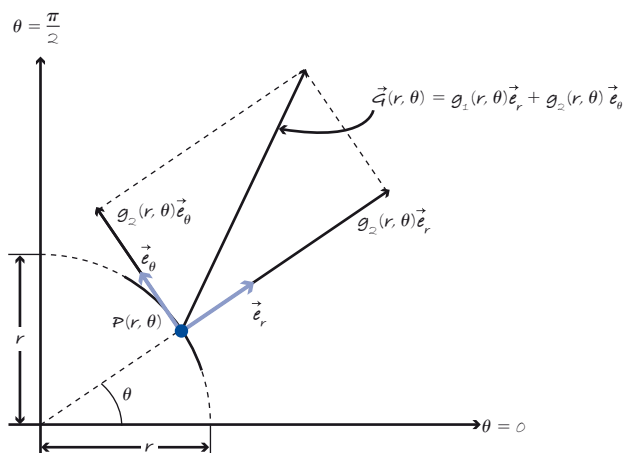
rectas, una horizontal y otra vertical, precisamente las que pertenecen al par de familias ortogonales que son la base del sistema cartesiano. A partir del punto \mathcal{P} se coloca sobre la horizontal en sentido positivo el vector \vec{i} , y sobre la vertical, \vec{j} . Ve la siguiente figura.



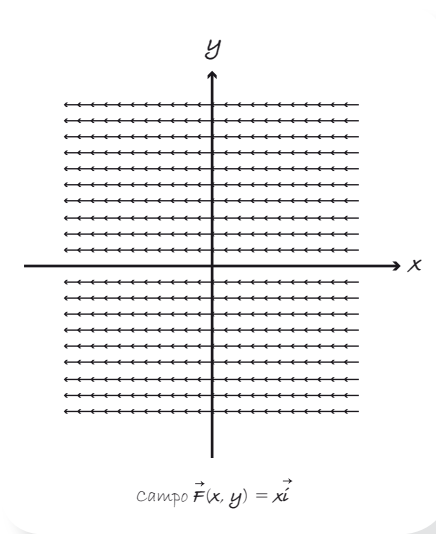
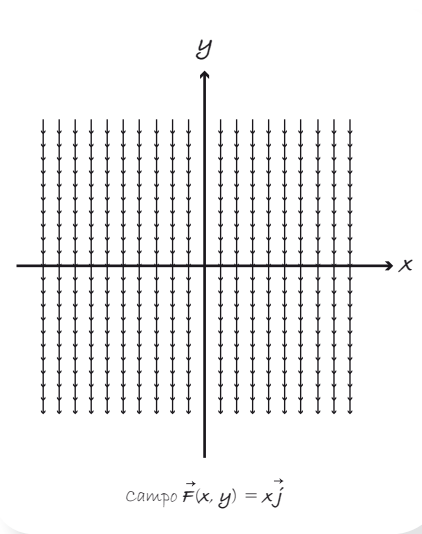
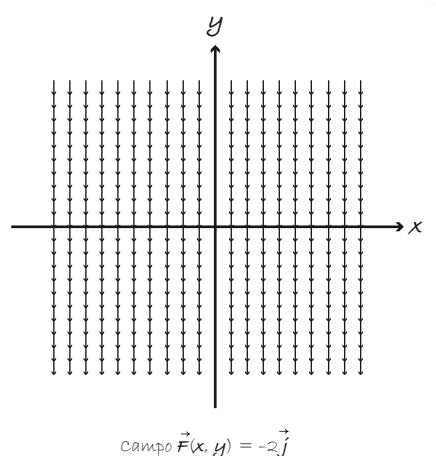
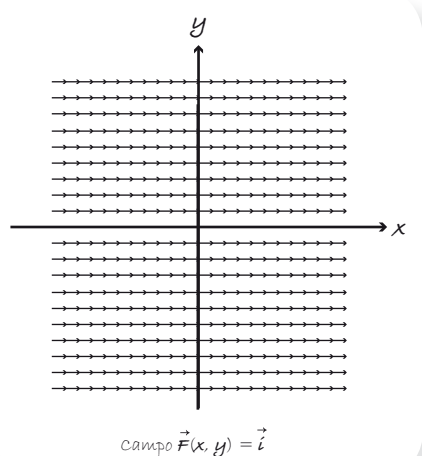
Un punto \mathcal{P} con coordenadas polares se escribe, en general, así: $\mathcal{P}(r, \theta)$. Esta notación indica que el punto \mathcal{P} está en la intersección de la circunferencia de radio r con centro en el origen y la recta que pasa por el origen correspondiente al ángulo θ (la circunferencia y la recta que pasa por el origen son curvas ortogonales pertenecientes, precisamente, al par de familias de curvas ortogonales que dan lugar a las coordenadas polares). Coloquemos en el punto $\mathcal{P}(r, \theta)$ el vector correspondiente a un campo vectorial que se denota por $\vec{G}(r, \theta)$. Coloquemos un vector unitario, partiendo de \mathcal{P} sobre la recta que pasa por el origen, en dirección “hacia fuera” o alejándose del origen, y nombrémoslo \vec{e}_r . Sobre la circunferencia, en sentido contrario a las manecillas del reloj y partiendo de \mathcal{P} , coloquemos otro vector unitario, y llamémoslo \vec{e}_θ . Entonces, el vector $\vec{G}(r, \theta)$ es la suma de dos vectores perpendiculares y múltiplos de los vectores unitarios \vec{e}_r y \vec{e}_θ , donde los números por los que se multiplican estos vectores unitarios dependen de las coordenadas del punto; es decir,

$$\vec{G}(r, \theta) = g_1(r, \theta)\vec{e}_r + g_2(r, \theta)\vec{e}_\theta,$$

donde $g_1(r, \theta)$ y $g_2(r, \theta)$ son funciones con valores reales.



En coordenadas cartesianas es relativamente sencillo describir campos cuyos vectores son siempre horizontales o verticales, esto es, siguiendo las familias de rectas ortogonales, base de las coordenadas cartesianas. Tomemos por ejemplo los campos: a) $\vec{F}(x, y) = \vec{i}$, b) $\vec{F}(x, y) = -2\vec{j}$, c) $\vec{F}(x, y) = x\vec{j}$ d) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i}$, cuyas gráficas se muestran a continuación.

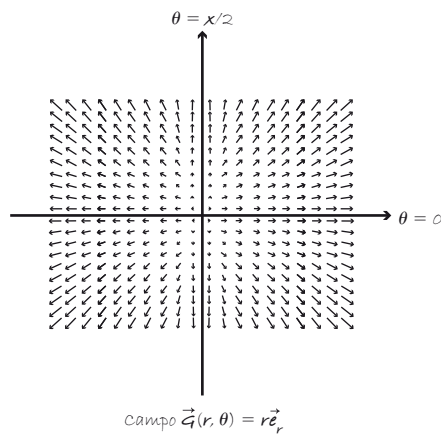
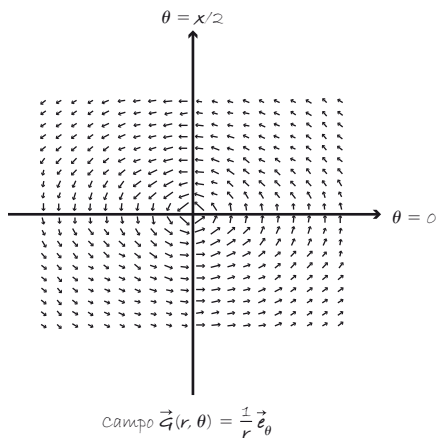
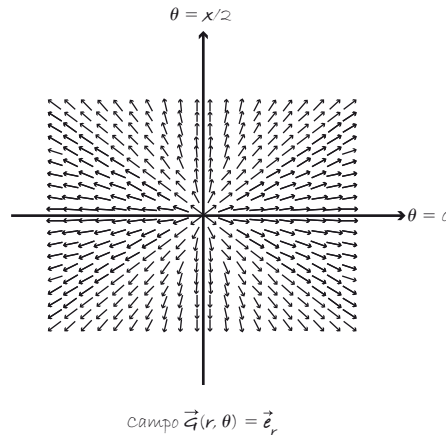
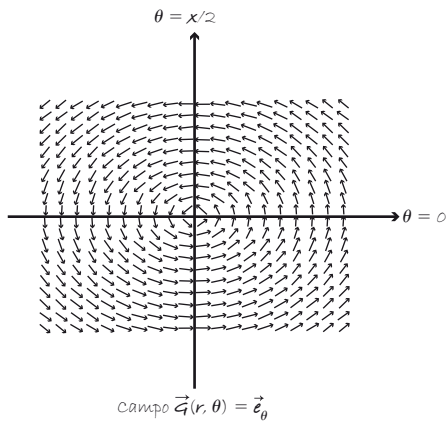


Es razonable esperar que con las coordenadas polares sea relativamente sencillo describir campos cuyas líneas coincidan con las de los sistemas de curvas ortogonales que generan este tipo de coordenadas. Veamos los siguientes ejemplos: a) $\vec{G}(r, \theta) = \vec{e}_\theta$, observa que aquí $g_1(r, \theta) = 0$ y $g_2(r, \theta) = 1$; b) $\vec{G}(r, \theta) = \vec{e}_r$; c) $\vec{G}(r, \theta) = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta$; d) $\vec{G}(r, \theta) = r\vec{e}_r$.

Estos campos vectoriales ya habían sido considerados en esta misma unidad, solo que habían sido escritos en coordenadas cartesianas. Por ejemplo, el campo magnético descrito en la consideración 7, $\vec{B}(x, y) = kI \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r^2} = kI \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$, tiene como líneas de campo las circunferencias con centro en el origen, y magnitud $\frac{kI}{r}$; sus vectores van en contra de las manecillas del reloj. Este campo descrito en coordenadas polares

queda así: $\vec{E}(r, \theta) = \frac{kI}{r} \vec{e}_\theta$, que corresponde, salvo por una constante, al campo dado en c). El campo en d) corresponde al campo de posiciones $x\vec{i} + y\vec{j}$ (observa que su magnitud es $\sqrt{x^2 + y^2} = r$). De hecho, los vectores \vec{e}_r y \vec{e}_θ son descritos así en coordenadas cartesianas:

$$\vec{e}_r = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \vec{e}_\theta = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Nota que mientras \vec{i} y \vec{j} son los mismos en cualquier punto, en cuanto llevan la misma dirección, \vec{e}_r y \vec{e}_θ dependen del punto donde sean colocados. \vec{e}_r coincide con \vec{i} en los puntos del eje x positivo, pero en el eje y positivo coincide con \vec{j} ; \vec{e}_θ coincide con \vec{j} en el eje x positivo, pero en el eje y positivo coincide con $-\vec{i}$.

11. El vector gradiente en coordenadas polares

Retomemos el contexto de la distribución de temperaturas en una placa, en aras de mejorar el entendimiento de las ideas que a continuación discutiremos. Si \mathcal{T} es la

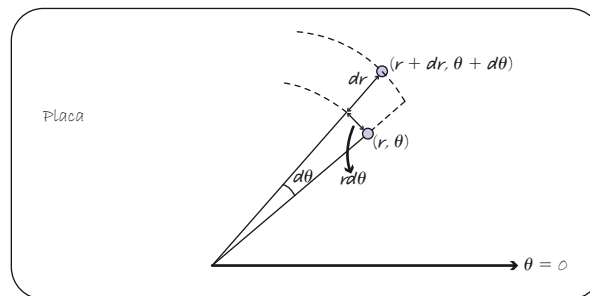
función de temperaturas, es claro que la temperatura en cada punto de la placa es la misma independientemente del sistema coordenado que se emplee para señalar en específico la correspondencia de la temperatura con los puntos de la placa. Las isotermas (curvas donde todos los puntos tienen la misma temperatura) siguen siendo las mismas, solo variará el modo de representarlas según el sistema de coordenadas que se utilice.

Dado un punto de la placa, habrá una dirección, independientemente del sistema de coordenadas, donde la razón que cambia la temperatura respecto al avance en esa dirección sea máxima. En todo caso lo que puede variar son los valores de las razones de cambio, pero por el empleo de unidades distintas de medición, los valores son cambiados de escala; sin embargo se mantienen las relaciones entre ellos. Es decir, el gradiente no cambia (dirección y magnitud) independientemente del sistema de coordenadas, no así la representación que de él se haga en cada sistema.

A continuación describiremos el gradiente de temperatura en el sistema de coordenadas polares. También arribaremos a su descripción de dos maneras distintas: con la primera, la forma del vector gradiente se determinará a partir de la observación de que al hacer el producto punto de este con el vector infinitesimal de desplazamiento, se debe obtener el diferencial de temperatura; con la segunda, se parte de que ya se conoce el gradiente en coordenadas cartesianas y se hacen las sustituciones y cambios de variable pertinentes. De hecho, en esta segunda forma de hacer surgir el gradiente en coordenadas polares se involucra un proceso de derivación conocido como **regla de la cadena para funciones de dos variables**.

- a) Supongamos que la temperatura en cada punto (r, θ) de la placa es $T = T(r, \theta)$. Si del punto de la placa con coordenadas (r, θ) nos movemos al punto con coordenadas $(r + dr, \theta + d\theta)$ (ve la siguiente figura), el diferencial de temperatura correspondiente es:

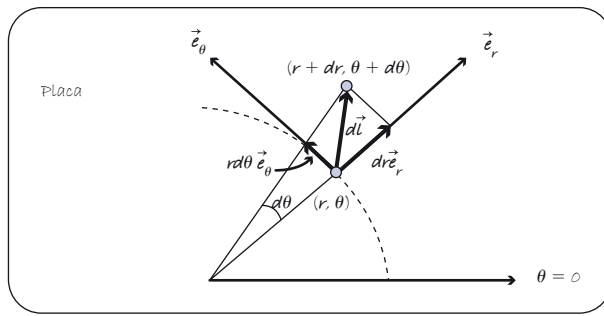
$$dT = T(r + dr, \theta + d\theta) - T(r, \theta); \text{ o bien, } dT = \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta) dr + \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta.$$



A su vez, este diferencial de temperatura debe ser $dT = \nabla T \cdot \vec{dl}$, es decir, el producto punto del vector gradiente con el vector infinitesimal de desplazamiento.

Al observar sobre la siguiente figura, podemos establecer la siguiente fórmula para el vector $d\vec{l}$:

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta.$$



El vector gradiente, aunque desconocido, debe ser del estilo:

$$\nabla T(r, \theta) = g_1(r, \theta)\vec{e}_r + g_2(r, \theta)\vec{e}_\theta \quad (2.9)$$

y debe cumplir que $dT = \nabla T(r, \theta) \cdot d\vec{l} = \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta)dr + \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta)d\theta$, o sea, $(g_1(r, \theta)\vec{e}_r + g_2(r, \theta)\vec{e}_\theta) \cdot (dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta) = \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta)dr + \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta)d\theta$. Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$g_1(r, \theta)dr + g_2(r, \theta)r d\theta = \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta)dr + \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta)d\theta.$$

Esto nos lleva a que si $g_1(r, \theta) = \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta)$ y $g_2(r, \theta) = \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta)$, esto es, $g_2(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta)$ se cumple el requerimiento planteado al principio.

Es decir, el gradiente en coordenadas polares queda establecido de la siguiente manera:

$$\nabla T(r, \theta) = \frac{\partial T}{\partial r}(r, \theta)\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}(r, \theta)\vec{e}_\theta.$$

- a) Supongamos de nuevo que la temperatura en cada punto (r, θ) de la placa es $T = T(r, \theta)$. Como r y θ son funciones de x y y , es decir, $r = r(x, y)$ y $\theta = \theta(x, y)$, la temperatura puede verse como una función de x y y , digamos $T = \mathcal{G}(x, y)$; es decir:

$$T = T(r, \theta) = T(r(x, y), \theta(x, y)) = \mathcal{G}(x, y) \text{ [observemos que la expresión } \mathcal{G}(x, y) \text{ no es } T(x, y)].$$

Entonces, una segunda forma de arribar a la fórmula del gradiente en coordenadas polares es partir de la fórmula del gradiente en coordenadas cartesianas y transformarla en una que contenga las variables de las polares; esto es, ya sabemos que si la temperatura está dada en términos de x y y , el gradiente de temperatura se da por la fórmula $\nabla \mathcal{G}(x, y) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(x, y)\vec{j}$. Se necesita entonces traducir esta fórmula en otra en términos de T, r y θ , además de los \vec{i} y \vec{j} en términos de los vectores \vec{e}_r y \vec{e}_θ .

Regla de la cadena

El diferencial de temperatura en coordenadas polares es:

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) dr + \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta.$$

Sabemos, además, que $r = r(x, y)$ y $\theta = \theta(x, y)$, por lo tanto, podemos obtener su diferencial en términos de x y y :

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) dy \quad \text{y} \quad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y) dy.$$

Sustituyendo las expresiones para dr y $d\theta$ en $d\tau$ y agrupando tenemos:

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) dr + \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta \\ d\tau &= \frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) \left(\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) dy \right) + \\ &\quad \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(r, \theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y) dy \right) \\ d\tau &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(r, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y) \right) dx + \\ &\quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(r, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y) \right) dy. \end{aligned}$$

Observando que las funciones entre los paréntesis son funciones de x y de y , ya que tanto r como θ dependen de estas variables, y tomando en cuenta que el diferencial de temperatura también es $d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial \tau}{\partial y}(x, y) dy$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \tau}{\partial x}(r(x, y), \theta(x, y)) = \\ &\quad \frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(r, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y); \\ \frac{\partial \tau}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \tau}{\partial y}(r(x, y), \theta(x, y)) = \\ &\quad \frac{\partial \tau}{\partial r}(r, \theta) \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(r, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y), \end{aligned} \tag{2.10}$$

que es un caso especial de lo que se llama **regla de la cadena para funciones de varias variables**.

En particular, como $r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta$ porque $x = r \cos \theta$; también, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sen \theta$ porque $y = r \sen \theta$.

Además, $\theta = \theta(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ entonces $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{r} \sen \theta$; y

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} \cos \theta.$$

Sustituyendo en (2.10), tenemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}(r(x, y), \theta(x, y)) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(r, \theta) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}(r, \theta) \sen \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}(r(x, y), \theta(x, y)) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(r, \theta) \sen \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}(r, \theta) \cos \theta.$$

Volviendo a la fórmula del gradiente de temperatura en términos de $\mathcal{G} \nabla \mathcal{T}(r, \theta) = \nabla \mathcal{G}(x, y) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, y) \vec{i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(x, y) \vec{j}$. Si sustituimos las expresiones anteriores en esta fórmula y tomamos en cuenta que $\vec{i} = \cos \theta \vec{e}_r - \sen \theta \vec{e}_\theta$; $\vec{j} = \sen \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$ (ve el problema 11 de la Tarea 8), se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{T}(r, \theta) &= \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(r, \theta) \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}(r, \theta) \sen \theta \right) (\cos \theta \vec{e}_r - \sen \theta \vec{e}_\theta) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(r, \theta) \sen \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}(r, \theta) \cos \theta \right) (\sen \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

Agrupando y considerando que $\sen^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, se llega a:

$$\nabla \mathcal{T}(r, \theta) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{e}_\theta,$$

que es la misma fórmula que obtuvimos para el gradiente en el primer modo que utilizamos.

- Obtén la derivada direccional de z en el punto P dado y en la dirección indicada.
 - $z = f(x, y) = y^2 e^{xy}$; $P = (0, 2)$; dirección hacia el punto $(5, 7)$.
 - $z = f(x, y) = x^2 \cos(xy)$; $P = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$; dirección indicada por $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j}$.
 - $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$; $P = (0, 0)$, dirección $\theta = \frac{\pi}{6}$.
 - $z = f(x, y) = x e^{xy}$; $P = (1, 1)$; dirección hacia el punto $(3, 4)$.
 - $z = f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$; $P = (0, 0)$; dirección indicada por $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.
 - $z = f(x, y) = x \ln(y^2 + 1)$; $P = (1, 2)$, dirección $\theta = \pi/3$.
- La temperatura en $^{\circ}\text{C}$ en cada punto de una placa en la cual se ha colocado un sistema coordenado cartesiano está dada por la fórmula $T(x, y) = 100e^{-x^2 - y^2}$. Al empezar a movernos a partir del punto $P(1, 3)$ en la dirección $\theta = \frac{\pi}{4}$, ¿la temperatura aumenta o disminuye? ¿En qué dirección θ se debe partir para conseguir el máximo aumento de temperatura?
- En cada inciso desde $a)$ hasta $g)$, tenemos una función de temperatura $T(x, y)$ en una placa y a un punto $P = (x_0, y_0)$ de la misma. Obtén para cada caso:
 - Un vector que indique la dirección en la cual es máxima la derivada direccional de T en el punto P .
 - El valor máximo de la derivada direccional en el punto P .
 - Un vector que indique la dirección en la cual es mínima la derivada direccional de T en el punto P .
 - El valor mínimo de la derivada direccional en el punto P .
 - Obtén la ecuación de la isoterma que pasa por P . Haz un dibujo con la gráfica de la isoterma, el punto P y los vectores de $i)$ y $iii)$. ¿Qué ángulo se forma entre la isoterma y los vectores?
 - $T(x, y) = x^2 + y^2 + 9$ $P = (2, 4)$
 - $T(x, y) = y - 2x$ $P = (1, 5)$
 - $T(x, y) = \frac{y}{x^2}$ $P = (2, 4)$
 - $T(x, y) = y - x^2$ $P = (3, 10)$
 - $T(x, y) = x - \frac{y}{x}$ $P = (2, 4)$
 - $T(x, y) = \frac{\ln y}{\ln x}$ $P = (2, 4)$
 - $T(x, y) = y - e^x$ $P = (0, 4)$
- En cada inciso desde $a)$ hasta $e)$ tenemos una función de temperatura $T(x, y)$ en una placa. Para cada caso:
 - Obtén la ecuación general de las isotermas.
 - Obtén la ecuación general de las curvas ortogonales a las isotermas.
 - Haz un dibujo que muestre las gráficas de algunas isotermas y algunas de sus curvas ortogonales; señala en el dibujo los puntos donde las curvas se intersecan.
 - $T(x, y) = x^2 + y^2 + 9$
 - $T(x, y) = y - 2x$

$$c) \tau(x, y) = \frac{y}{x^2}$$

$$d) \tau(x, y) = y - x^2$$

$$e) \tau(x, y) = y - e^x$$

5. Líneas de campo y curvas equipotenciales.

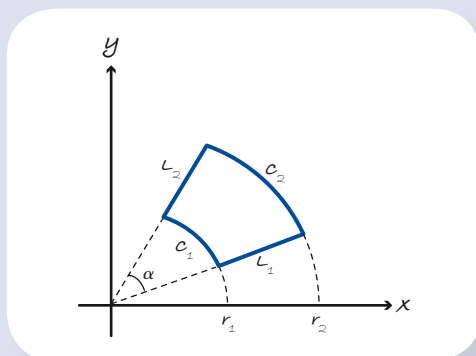
Considera a los campos: i) $\vec{F} = \frac{-2y}{x^3}\vec{i} + \frac{1}{x^2}\vec{j}$, ii) $\vec{F} = -e^x\vec{i} + \vec{j}$ y iii) $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$. Para cada uno:

- Verifica que es gradiente.
 - Obtén la ecuación diferencial de las líneas del campo.
 - Obtén la ecuación de las líneas del campo.
 - Obtén la función potencial.
 - Obtén la ecuación de las curvas equipotenciales.
 - Obtén la ecuación diferencial de las curvas equipotenciales.
 - Haz un dibujo mostrando en el plano xy algunas líneas del campo y algunas curvas equipotenciales.
6. Considera si el campo $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + 2x\vec{j}$ responde a lo siguiente:

- ¿Es gradiente? Comprueba.
- Obtén la ecuación diferencial de las líneas del campo.
- Encuentra la ecuación de las líneas del campo.
- Halla la ecuación diferencial de la familia de curvas perpendiculares a las líneas del campo.
- Obtén la ecuación de la familia de curvas perpendiculares a las líneas del campo.
- Haz un dibujo mostrando en el plano xy algunas líneas del campo y algunas curvas perpendiculares.

7. Considera a los campos $\vec{F}(x, y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$, $\vec{u}(x, y) = \frac{\vec{F}(x, y)}{|\vec{F}(x, y)|} = \frac{-x\vec{i} - y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $\vec{c}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$.

- Muestra que \vec{F} es radial hacia dentro, \vec{u} es radial hacia dentro unitario, y \vec{c} es circular y va en sentido de las manecillas del reloj.
- Considera la región en el plano xy limitada por dos segmentos c_1 y c_2 de circunferencias con centro en el origen y de radios r_1 y r_2 , respectivamente, y dos segmentos radiales L_1 y L_2 de rectas que pasan por el origen formando un ángulo α radianes entre ellas, como se muestra a continuación.



Considerando que en los segmentos circulares se hace un desplazamiento en contra del movimiento de las manecillas del reloj, y en los segmentos lineales el desplazamiento es hacia fuera (alejándose del origen), calcula las siguientes integrales de línea usando los cálculos especiales vistos en la consideración 5:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}; \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}; \int_{L_1} \vec{u} \cdot d\vec{l}; \int_{L_2} \vec{u} \cdot d\vec{l}; \int_{C_1} \vec{G} \cdot d\vec{l}; \int_{C_2} \vec{G} \cdot d\vec{l}; \int_{L_1} \vec{G} \cdot d\vec{l}; \int_{L_2} \vec{G} \cdot d\vec{l}.$$

8. Considera a los campos: $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{u}(x, y) = \frac{\vec{F}(x, y)}{|\vec{F}(x, y)|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $\vec{G}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$.

Si la curva C es la unión de todos los segmentos (circulares y radiales) del ejercicio anterior, recorrida en sentido contrario a las manecillas del reloj, calcula la integral de línea usando los cálculos especiales de la consideración 5, a lo largo de la curva C para cada uno de los campos dados.

9. Si el campo eléctrico que genera una carga puntual positiva de q coulombs colocada en el origen, en coordenadas cartesianas es:

$$\vec{E}(x, y, z) = kq \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

- a) Verifica que la siguiente función es su función potencial.

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

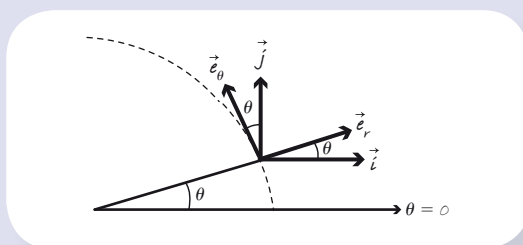
- b) Una función de tres variables, $w = f(x, y, z)$, tiene una familia de **superficies** de nivel (en lugar de curvas de nivel) dadas por la ecuación de tres variables: $f(x, y, z) = c$. Si esta función corresponde a una función potencial, se habla entonces de **superficies equipotenciales**.

¿Qué tipo de superficies son las superficies equipotenciales del campo eléctrico?

10. Consideremos la función $z = \varphi(x, y) = y$.

- Obtén la ecuación de la familia de curvas de nivel.
- Halla la ecuación de la curva de nivel que pasa por $P(1, 2)$.
- Grafica algunas curvas de nivel, entre ellas la del inciso anterior.
- Obtén el campo gradiente de la función.
- Encuentra la ecuación de la familia de las líneas del campo gradiente.
- Obtén la ecuación de la línea de campo que pasa por $P(1, 2)$.
- Dibuja algunas de las líneas del campo gradiente, entre ellas la del inciso anterior.
- ¿Qué se puede decir de este par de familias de curvas?

11. Considera el siguiente dibujo, donde se muestran los cuatro vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$.



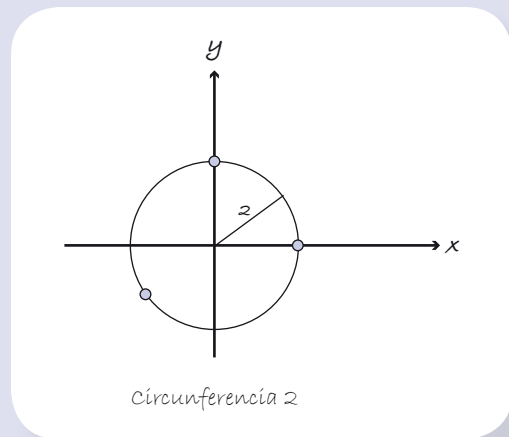
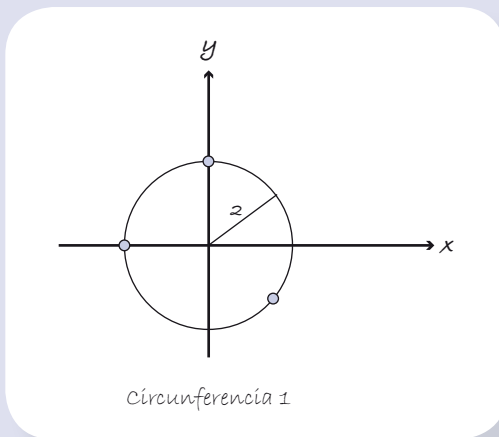
a) Explica las siguientes fórmulas tomando como base la figura anterior.

$$\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{j} = \sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta.$$

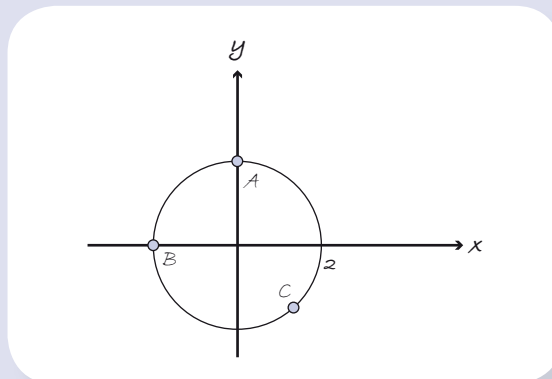
b) Tomando ahora en cuenta ahora que \vec{e}_θ y \vec{e}_r son vectores unitarios perpendiculares y que \vec{i} y \vec{j} también lo son, con base en la figura explica las fórmulas

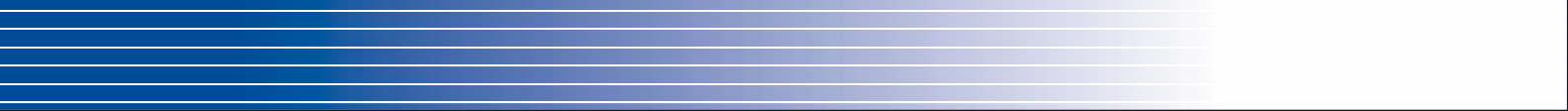
$$\vec{e}_r = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{i} = \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta.$$

12. a) En los puntos marcados de la circunferencia 1 coloca los vectores correspondientes del campo $\vec{F}(r, \theta) = -\frac{1}{r}\vec{e}_r$.
- b) En los puntos marcados de la circunferencia 2 coloca los vectores correspondientes del campo $\vec{F}(r, \theta) = r\vec{e}_\theta$.



13. Dibuja en el punto A el vector correspondiente a $\vec{F}(r, \theta) = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_\theta$; en B, el correspondiente a $\vec{F}(r, \theta) = (r + 1)\vec{e}_r$, y en el punto C coloca el vector $\vec{e}_r - 2\vec{e}_\theta$.





3.1

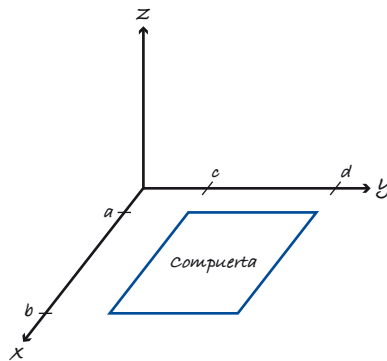
Fórmula general para el flujo y teorema de la divergencia

En este tema se construye una fórmula general con base en argumentos de corte infinitesimal para calcular el flujo de un campo vectorial a través de una superficie. Con este propósito surgirá de manera natural el concepto matemático de integral de superficie. Constituida en herramienta del pensamiento infinitesimal, esta integral permitirá definir la divergencia de un campo y hacer evidente el llamado **teorema de la divergencia**. A su vez, concepto y teorema serán partícipes de importantes aplicaciones en el terreno de la electricidad y el magnetismo y en la mecánica de fluidos.

En la siguiente Situación-Problema retomamos la idea de flujo. Ya hemos discutido antes dos de las situaciones que se proponen; volverlas a considerar aquí tiene la intención de presentar un tratamiento global y continuo del tema. Hay una situación más que es nueva, pero no por ello complicada: un fluido cuyo movimiento no es perpendicular a la compuerta por la que pasa. Se desea construir una fórmula para el flujo que contemple estos casos y a la situación que será presentada en la sección de consideraciones alrededor de esta Situación-Problema.

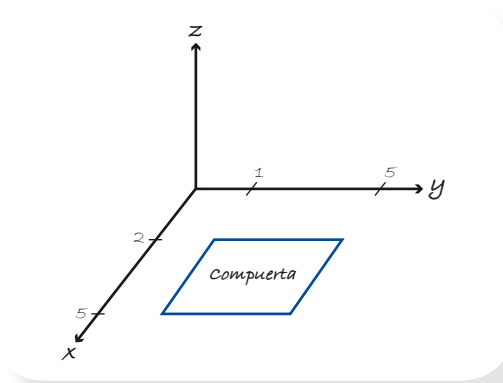
Situación-Problema 12 (SP-12)

- a) Considera la compuerta señalada en la figura siguiente, la cual consiste en los puntos en el plano xy que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$, e imagina que en cada punto de ella el agua la atraviesa perpendicularmente con **velocidad constante** v , m/s , y en dirección positiva del eje z .



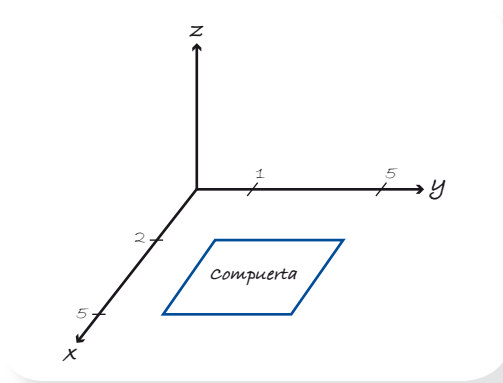
1. Dibuja el vector velocidad correspondiente al movimiento del agua en cada una de las esquinas de la compuerta.
 2. Si colocáramos el vector velocidad en todos los puntos de la compuerta, ¿qué figura se formaría?
 3. Calcula el flujo de agua a través de la compuerta, en dirección positiva del eje z .
 4. ¿Qué relación tiene este flujo con la figura del punto 2?
- b) Ahora consideremos la compuerta descrita por las siguientes expresiones: $2 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 5$ y $z = 0$, y de nueva cuenta supongamos que el agua fluye a través de cada punto de la compuerta, pero ahora con una velocidad de acuerdo con la fórmula $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{k}$.

1. Dibuja la figura que se formaría si colocáramos los vectores de velocidad correspondientes a todos los puntos de la compuerta.
2. Calcula el volumen de la figura del punto anterior.
3. ¿Qué relación tiene el volumen de esta figura con el flujo de agua a través de la compuerta en dirección del eje z positivo?



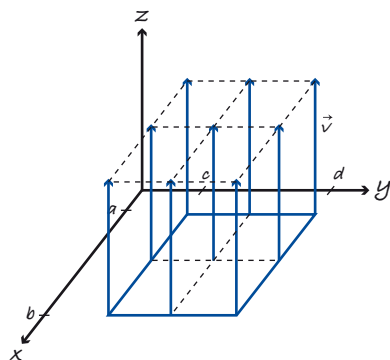
- c) Consideremos la compuerta anterior y supongamos que la velocidad del agua está dada por $\vec{v} = 0\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$.

1. Dibuja el vector velocidad correspondiente al movimiento del agua en cada una de las esquinas de la compuerta.
2. Si colocáramos el vector velocidad en todos los puntos de la compuerta, ¿qué figura se formaría?
3. Calcula el volumen de la figura del punto anterior.
4. ¿Qué relación tiene el volumen de esta figura con el flujo de agua a través de la compuerta en dirección del eje z positivo?

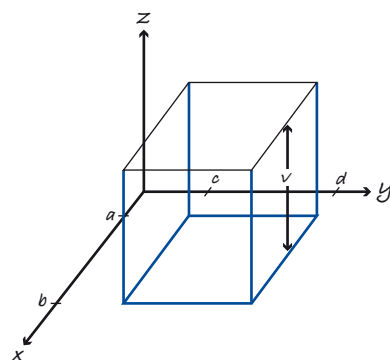


Discusión de la Situación-Problema 12

En el inciso *a*), el campo de velocidades es constante, va en dirección del eje z positivo y es de magnitud v ; en forma simbólica y abreviada: $\vec{v}(x, y, z) = v\vec{k}$. Si colocamos este vector a algunos puntos del rectángulo (la compuerta), incluidos los de las esquinas, podemos tener una figura como la siguiente.



Al colocar el vector velocidad en cada uno de los puntos de la compuerta se formará una caja rectangular cuya base es la compuerta, y la altura es v , la magnitud de \vec{v} .



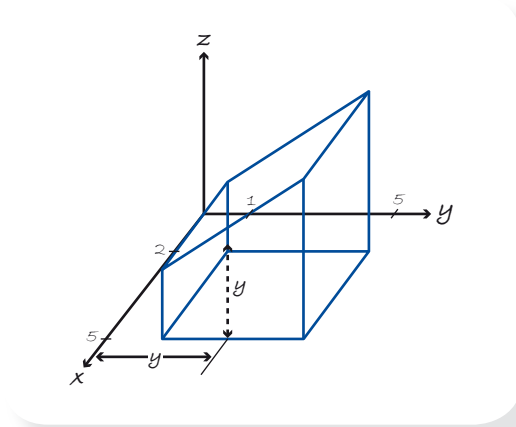
Ya que este campo de velocidades es constante, y perpendicular a la superficie en cuestión (el rectángulo), el flujo puede calcularse con la fórmula

$$\text{Flujo} = \pm (\text{magnitud de la velocidad}) \times (\text{área de la superficie}).$$

Tomamos el signo positivo porque el agua fluye en dirección del eje z positivo y se pide el flujo del agua a través de la compuerta en la misma dirección. Por lo tanto, el flujo es $\mathcal{F} = (v) (\text{área de } \mathcal{S}) = (v) (b-a) (d-c)$, que coincide numéricamente con el volumen de la caja y en donde \mathcal{S} es el rectángulo (la compuerta) cuyas dimensiones son $(b-a)$ y $(d-c)$.

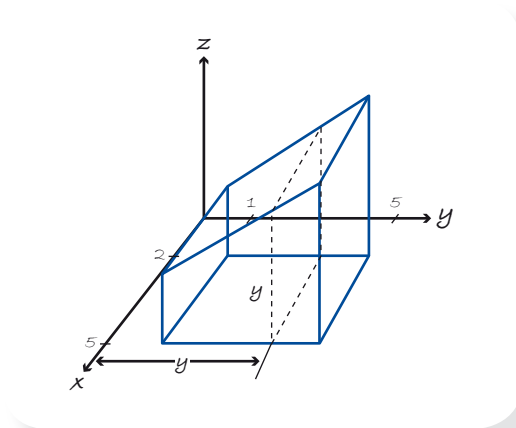
En el inciso *b*) el campo de velocidades está dado por la función vectorial $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{k}$, y la región (la compuerta) que atraviesa el agua es el rectángulo $\mathcal{S}: 2 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5, z = 0$.

Al colocar el vector correspondiente a cada punto del rectángulo se forma la siguiente figura.



En la discusión de la SP-4, de la Unidad 1, calculamos el flujo de este campo a través del rectángulo \mathcal{S} y en dirección del eje z positivo, que es lo que se pide aquí. En aquella discusión se presentan varias formas de calcular el volumen de la figura anterior, cuyo valor coincide con el flujo que se nos pide (porque la dirección del fluido es la misma que la del flujo que estamos calculando). Nos interesa reproducir aquí, con ligeras variantes, la forma de calcular el volumen en la que se involucraron las integrales; si bien es cierto que las otras formas de calcular el volumen (completar el volumen de una caja o multiplicar el área de la cara de enfrente por el fondo, por ejemplo) hacen innecesario utilizar integrales, habrá muchas situaciones en las que este será el único recurso. Además, nos estamos encaminando a construir una fórmula general para el flujo que involucra una integral de superficie de la cual la integral que manejamos en esta situación-problema es un caso particular.

Si cortamos la figura con un plano paralelo al plano xz para algún valor de y (entre 1 y 5), aparece como el siguiente dibujo.



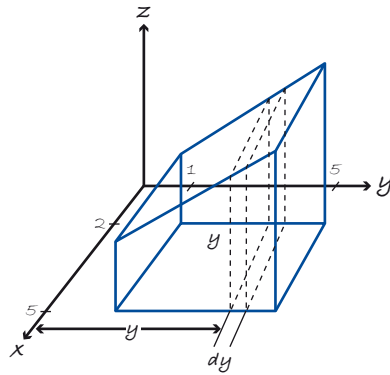
La región del corte es, en este caso, un rectángulo con base 3 y altura y , por lo tanto, su área es $\mathcal{A}(y) = 3y$ (depende del valor que tome y); esta área también puede verse como la integral

$\int_{x=2}^{x=5} f(x, y) dx$, donde $f(x, y) = y$. Calculemos su valor:

$\int_{x=2}^{x=5} f(x, y) dx = \int_{x=2}^{x=5} y dx$; ahora bien, como y está fija (es decir, en el proceso de integración se le ve como constante) tenemos que

$$\int_{x=2}^{x=5} y dx = yx \Big|_{x=2}^{x=5} = 5y - 2y = 3y = A(y).$$

Si multiplicamos $A(y)$ por dy , formamos un diferencial de volumen $dV = A(y) dy = 3y dy$; que representa el volumen de una rebanada de anchura infinitesimal dy mostrada en el siguiente dibujo.



Al sumar todos estos diferenciales de volumen desde $y = 1$ hasta $y = 5$, se tiene el volumen de la caja; es decir, el volumen de la caja es la siguiente integral:

$$V = \int_{y=1}^{y=5} 3y dy.$$

Integrando y evaluando tenemos que $V = \frac{3}{2} y^2 \Big|_{y=1}^{y=5} = \frac{75}{2} - \frac{3}{2} = 36$.

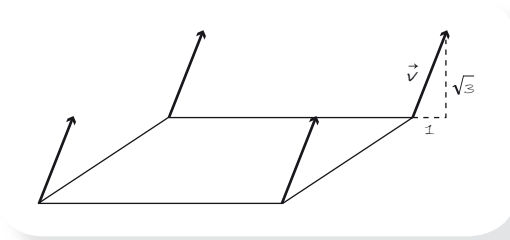
Al margen de lo obtenido, el volumen se puede ver como el resultado de realizar dos integrales seguidas: $\int_{x=2}^{x=5} f(x, y) dx$, con la que se consiguió $A(y)$, y $\int_{y=1}^{y=5} A(y) dy$, mediante la que se obtuvo finalmente el volumen. En realidad se ha hecho una **iteración de integrales**, esto es, se realiza una y el resultado se vuelve a integrar. Este proceso de doble integración se representa por una **integral doble** que se escribe así:

$$\int_{y=1}^{y=5} \int_{x=2}^{x=5} f(x, y) dx dy.$$

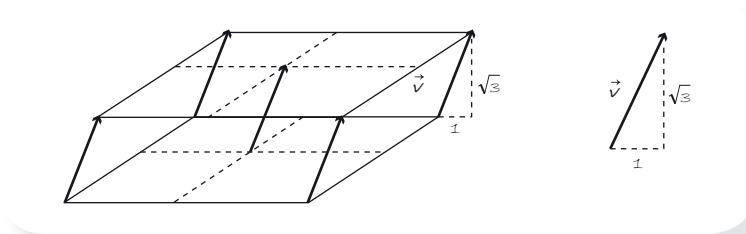
Volveremos con este tipo de integrales en las consideraciones de la SP-12.

En el inciso c), el campo vectorial dado es $\vec{v}(x, y, z) = 0\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$, y el rectángulo $S: 2 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5, z = 0$.

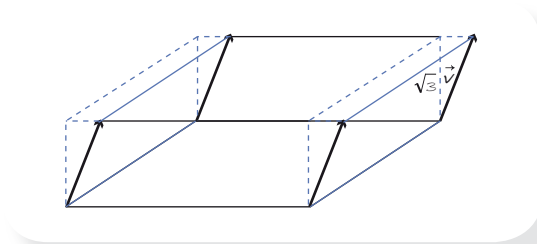
Observemos que el campo es constante, pero una característica que lo distingue de los dos anteriores es que no es perpendicular al plano xy . Si colocamos los vectores de este campo correspondientes a los vértices del rectángulo, obtenemos el siguiente dibujo.



Al colocar los vectores del campo en cada punto del rectángulo se forma la siguiente figura: una especie de caja ladeada.



El volumen de esta caja es el área de la base (el área del rectángulo \mathcal{S}) por la altura, la cual es $\sqrt{3}$, que corresponde a la longitud del cateto vertical del triángulo mostrado en la figura anterior. Un argumento a favor de que este es el volumen es el siguiente: si colocamos el vector $\sqrt{3}\vec{k}$ en cada esquina del rectángulo, será evidente que podemos recortar una parte de la caja ladeada (la parte que se “sale” del rectángulo, a la derecha) y colocarla en la parte que falta (del lado izquierdo) para formar una caja recta de altura $\sqrt{3}$ (ve la siguiente figura). Así, el volumen es: $V = \sqrt{3}$ (área de \mathcal{S}) = $\sqrt{3}$ (12) = 20.7846 unidades cúbicas.



En relación con el flujo de agua a través del rectángulo \mathcal{S} en dirección de \vec{k} , afirmamos que este es numéricamente igual al volumen de la caja ladeada, porque el espacio que se llenaría en una unidad de tiempo con este fluido sería precisamente el de esta caja, por lo que su valor es también 20.7846, pero ahora en unidades cúbicas por unidad de tiempo. Por otra parte, si consideramos el campo de velocidades $\sqrt{3}\vec{k}$, observamos que su flujo a través del rectángulo en dirección de \vec{k} es el mismo que el flujo del

campo que estamos considerando en este inciso de la situación problema. Mientras que el flujo del campo de velocidades $\sqrt{\varepsilon}\vec{k}$ se identifica con el volumen de la caja recta de altura $\sqrt{\varepsilon}$, el flujo del campo del inciso c) se identifica con el volumen de la caja ladeada, pero, como hemos visto, sus valores coinciden.

Conviene revisar desde diferentes perspectivas lo dicho en el párrafo anterior, para efectos de obtener, más adelante, una fórmula general del flujo:

- a) El flujo del campo $\circ\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{\varepsilon}\vec{k}$ a través de la superficie \mathcal{S} y en dirección de \vec{k} es igual al flujo del campo $\sqrt{\varepsilon}\vec{k}$ en dirección de \vec{k} a través de la misma superficie. El resultado general aquí es que la componente de la velocidad de un fluido que contribuye al flujo es la componente en la dirección perpendicular a la superficie.
- b) El producto punto entre el campo de velocidades $\vec{v} = \circ\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{\varepsilon}\vec{k}$ (del fluido cuyo flujo se calcula) y el vector unitario $\vec{N} = \vec{k}$ (que da la dirección perpendicular hacia donde se calcula el flujo) es precisamente $\sqrt{\varepsilon}$, la componente escalar del campo de velocidades en la dirección del eje z positivo, por lo que una vez hecho este producto sólo falta multiplicarlo por el área de la superficie para obtener el flujo. El resultado general aquí es que cuando el fluido se mueve con velocidad \vec{v} constante, pero no perpendicular a la superficie, el producto punto de la velocidad \vec{v} con el vector normal unitario \vec{N} a la superficie en la dirección que se quiere calcular el flujo nos da la componente escalar de la velocidad en dicha dirección. Esta es la componente que contribuye al flujo, por lo que para obtenerlo solo hace falta multiplicar dicha componente por el área de la superficie.

Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 12

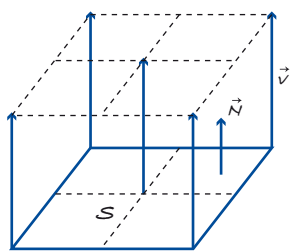
1. Construcción de la fórmula general para el flujo

En este primer punto queremos construir una fórmula general para el flujo. La utilizaremos para volver a considerar el cálculo del flujo en las distintas situaciones presentadas en la SP-12, con la idea de darnos cuenta de una forma sistemática de abordar ese tipo de problemas.

Antes de proceder con la construcción de la fórmula general del flujo, es conveniente recordar que hemos identificado al **flujo** como la cantidad de agua (o cualquier fluido) que atraviesa una superficie por unidad de tiempo, en una *dirección dada*. A continuación se señala una serie de casos en los que se desea calcular el flujo; en general, la “dirección dada” será identificada por la dirección de un vector normal (perpendicular) unitario asociado a la superficie.

Caso 1. Fluido con *velocidad constante* atravesando perpendicularmente una *superficie plana*

Supongamos que tenemos una *superficie plana* \mathcal{S} ; una dirección asociada a esta superficie puede escogerse colocando un vector normal unitario \vec{N} en alguno de los dos lados de ella. Supongamos que el agua se mueve con *velocidad constante* atravesando *perpendicularmente* la superficie \mathcal{S} de área \mathcal{A} . En este caso, de hecho el más simple, el flujo \mathcal{F} de agua que atraviesa la superficie \mathcal{S} en la dirección dada es $\mathcal{F} = \pm\mathcal{A}|\vec{v}|$, donde $|\vec{v}|$ es la magnitud de \vec{v} y el signo depende de si la dirección de \vec{v} coincide (+) o no (-) con la de \vec{N} (la dirección hacia donde se calcula el flujo).



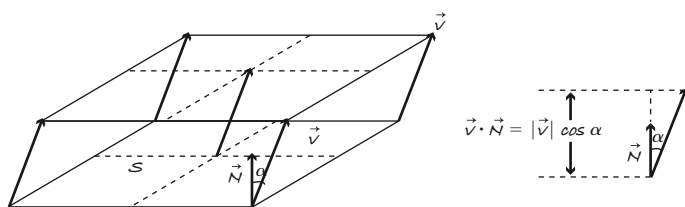
En esta figura, los vectores de velocidad \vec{v} del agua son de la misma magnitud y se dirigen perpendicularmente hacia arriba del rectángulo S . Por su parte, el vector normal unitario al rectángulo, es decir, \vec{N} , indica la dirección en que debe calcularse el flujo. En estas circunstancias se tiene que el flujo a través del rectángulo está dado por la expresión $A|\vec{v}|$, donde A es el área del rectángulo S .

Caso 2. Fluido con *velocidad constante* atravesando una *superficie plana*

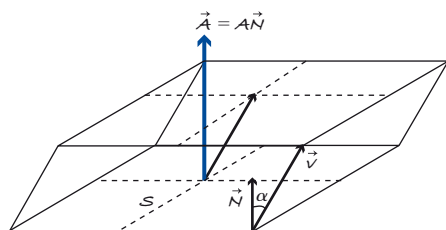
Supongamos ahora que el fluido (el agua) se desplaza con *velocidad \vec{v} constante* atravesando una *superficie plana S* de área A , formando un ángulo α con el vector normal unitario \vec{N} a la superficie en la dirección elegida. En este caso, la componente escalar de la velocidad en la dirección normal a la superficie es la que contribuye al flujo, y la fórmula es:

$$F = (|\vec{v}| \cos \alpha) A = (\vec{v} \cdot \vec{N}) A.$$

Observa la siguiente figura.

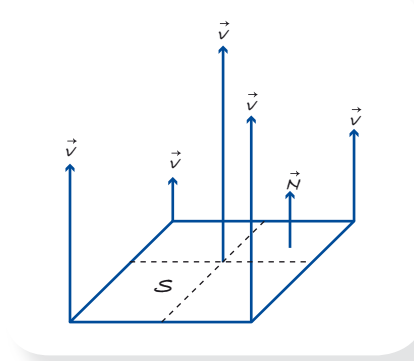


Si revisamos la fórmula anterior para calcular el flujo, es decir, $F = |\vec{v}| \cos(\alpha) A$, vemos que puede interpretarse como el producto punto del vector velocidad \vec{v} con un vector \vec{A} normal a la superficie S y con magnitud igual al área A de dicha superficie; es decir, el vector \vec{A} es igual a $A\vec{N}$, y la fórmula del flujo es $F = \vec{v} \cdot \vec{A}$, observa la siguiente figura.



Caso 3. Fluido con *velocidad variable* atravesando perpendicularmente una *superficie plana*

El fluido se desplaza con *velocidad* \vec{v} *variable* (en realidad debería ser velocidad no necesariamente constante) y atraviesa *perpendicularmente* una *superficie plana* \mathcal{S} en dirección del vector normal unitario \vec{N} , pero la *magnitud de su velocidad* varía de uno a otro punto del rectángulo \mathcal{S} , como lo indica la siguiente figura.



Observemos que en este caso no puede emplearse ninguna de las fórmulas anteriores para calcular el flujo; sin embargo, podemos utilizar la estrategia de la toma del elemento diferencial para conseguir un diferencial de flujo y, al integrarlo, tendremos la fórmula para el flujo (total) requerido. Es decir, tomemos una parte infinitamente pequeña de la superficie \mathcal{S} : podemos considerar que en ella la velocidad del fluido tiene magnitud constante (la dirección ya es constante y perpendicular a la superficie, como quedó establecido). Se puede calcular así un diferencial de flujo, usando en esa región infinitamente pequeña lo que se sabe del caso 1; posteriormente, sumamos esos diferenciales de flujo para conseguir el flujo total a través de toda la superficie.

Tomemos un punto \mathcal{P} de la superficie \mathcal{S} , sea dA el área de una porción infinitamente pequeña de \mathcal{S} que contiene a \mathcal{P} ; si $\vec{v}(\mathcal{P})$ es la velocidad del fluido en el punto \mathcal{P} , podemos considerar que esta velocidad es la misma en toda la región infinitamente pequeña. Tenemos entonces las condiciones del caso 1 para calcular el flujo (un diferencial del flujo total) en esa región infinitamente pequeña: vector velocidad constante, $\vec{v}(\mathcal{P})$, que va en dirección del vector normal (porque el campo de velocidades completo así va), entonces la fórmula del caso 1, $F = |\vec{v}|A$, se traduce en

$$dF = |\vec{v}(\mathcal{P})|dA.$$

Sumando sobre todas las regiones infinitesimales que conforman la región \mathcal{S} se tiene que el flujo total es

$$F = \iint_{\mathcal{S}} |\vec{v}(\mathcal{P})|dA,$$

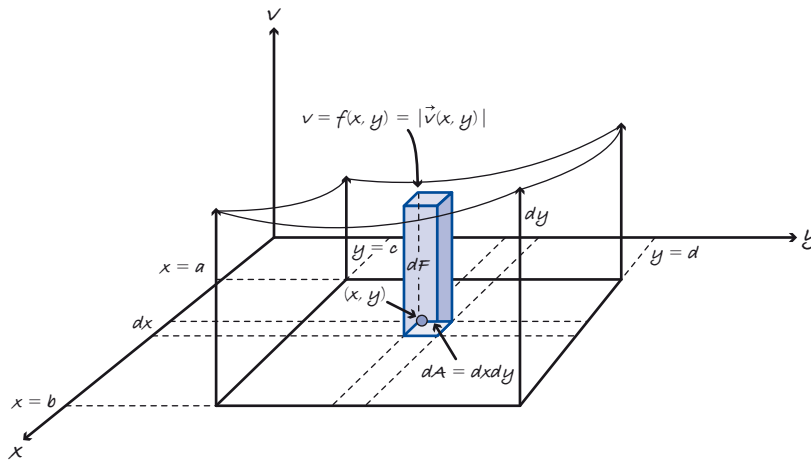
donde la doble integral indica que se está considerando una suma a lo “largo” y “ancho” de una superficie, a diferencia de cuando se toman sumas a lo largo de una curva, donde se utiliza una sola integral.

Tomemos el caso en que $\vec{v}(\mathcal{P}) = f(x, y)\vec{k}$; consideremos que la velocidad va en dirección del vector normal unitario $\vec{N} = \vec{k}$ (es decir, $f(x, y) \geq 0$) y que \mathcal{S} es el

rectángulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, en el plano xy . Tomando el diferencial de área como $dA = dx dy$, tenemos entonces que el diferencial de flujo adopta la forma

$$dF = |\vec{v}(\mathcal{P})| dA = f(x, y) dx dy.$$

La siguiente figura ilustra un prisma infinitesimal cuyo volumen coincide con el diferencial de flujo.



Observemos que si $\vec{v}(\mathcal{P}) = f(x, y)\vec{k}$ va en dirección de \vec{k} , lo cual sucede cuando $f(x, y)$ es positiva en todo punto de \mathcal{S} , se da que $|\vec{v}(\mathcal{P})| = f(x, y)$, y tenemos, por lo tanto, que en este caso el flujo total es

$$F = \iint_{\mathcal{S}} |\vec{v}(\mathcal{P})| dA = \iint_{\mathcal{S}} f(x, y) dx dy.$$

Considerando ahora que la superficie es el rectángulo $\mathcal{S}: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, en el plano xy , el flujo adopta la forma

$$F = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx dy.$$

Alrededor de esta fórmula queremos hacer dos observaciones importantes:

- Si $z = f(x, y)$ es una función tal que $f(x, y) \geq 0$ para todos los puntos del rectángulo $\mathcal{S}: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, en el plano xy , entonces el volumen de la región bajo la gráfica de la función $z = f(x, y)$, encima del plano xy y limitada al rectángulo \mathcal{S} , es

$$V = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx dy.$$

Es decir, el volumen coincide numéricamente con el flujo del campo en dirección de $\vec{N} = \vec{k}$ a través del rectángulo \mathcal{S} .

- Si tuviéramos que en un punto $\mathcal{P}(x, y)$ del rectángulo \mathcal{S} , el valor de la función $f(x, y)$ fuera negativo, es decir, que el vector $\vec{v}(\mathcal{P}) = f(x, y)\vec{k}$ fuera en sentido contrario a $\vec{N} = \vec{k}$, entonces el diferencial de flujo sería ahora $dF = -|\vec{v}(\mathcal{P})| dA$,

lo que resulta de aplicar la fórmula del caso 2, $\mathcal{F} = |\vec{v}| \mathcal{A} \cos \alpha$, y tomando en cuenta que $\alpha = \pi$ radianes y que $\cos \alpha = -1$.

Notemos ahora que la magnitud de $\vec{v}(\mathcal{P}) = f(x, y)\vec{k}$, es $|f(x, y)| = -f(x, y)$, ya que $f(x, y)$ es negativo; entonces $d\mathcal{F} = -|\vec{v}(\mathcal{P})|d\mathcal{A} = f(x, y)d\mathcal{A}$. Como consecuencia tenemos que el flujo a través del rectángulo \mathcal{S} del fluido con un campo de velocidades $\vec{v}(\mathcal{P}) = f(x, y)\vec{k}$ en dirección de $\vec{N} = \vec{k}$ es

$$\mathcal{F} = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx dy,$$

independientemente del signo de $f(x, y)$.

Estas observaciones nos llevan a decir que la integral $\int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx dy$ siempre calcula el flujo del campo $\vec{v} = f(x, y)\vec{k}$ a través del rectángulo \mathcal{S} y en dirección $\vec{N} = \vec{k}$; pero no siempre se está calculando el volumen de la región entre la gráfica de $z = f(x, y)$, el plano xy y limitada al rectángulo \mathcal{S} .

Consideremos, por ejemplo, la función $z = f(x, y) = y$ y el campo correspondiente $\vec{v} = f(x, y)\vec{k}$, tomemos el rectángulo \mathcal{S} : $2 \leq x \leq 5$; $-5 \leq y \leq 5$. La integral que representa el flujo en este caso es:

$$\int_{y=-5}^{y=5} \int_{x=2}^{x=5} y dx dy.$$

La primera integral es $\int_{x=2}^{x=5} y dx = xy \Big|_{x=2}^{x=5} = 5y - 2y = 3y$; entonces la integral doble es

$$\int_{y=-5}^{y=5} \int_{x=2}^{x=5} y dx dy = \int_{y=-5}^{y=5} 3y dy = \frac{3}{2} y^2 \Big|_{-5}^5 = 0$$

Este es el flujo del campo, pero no es el volumen entre la gráfica y el plano xy (limitándonos al rectángulo \mathcal{S}). Este volumen es 75. Estos valores corresponden a lo que encontramos en la consideración 3 de la SP-4 de la Unidad 1.

Volveremos más adelante con las integrales dobles. Por lo pronto, regresemos con la construcción de una fórmula general para el cálculo del flujo.

Caso 4. Fluido con *velocidad variable* atravesando una *superficie no necesariamente plana*

El fluido se desplaza con velocidad \vec{v} *variable en magnitud y dirección*, además atraviesa una *superficie curva* \mathcal{S} .

Al elegir para un punto \mathcal{P} de la superficie \mathcal{S} un vector perpendicular (y unitario) a la superficie, llamémosle $\vec{N}(\mathcal{P})$, se ha definido una dirección para la superficie completa* (o un lado de ella).

Se quiere calcular el flujo del campo \vec{v} a través de la superficie \mathcal{S} en dirección de $\vec{N}(\mathcal{P})$ (o hacia el lado elegido de la superficie). De nueva cuenta conviene utilizar la estrategia de la toma del elemento diferencial para calcular el flujo a través de toda

*Estamos considerando que en una superficie se puede distinguir dos lados, por lo que un vector perpendicular a la superficie en un punto determinado tiene dos direcciones posibles opuestas entre sí. Una vez establecida la dirección del vector perpendicular unitario en un punto, se establece la dirección de los vectores perpendiculares unitarios en todos los demás puntos hacia el mismo lado de la superficie.

la superficie. Tomar un elemento diferencial de superficie tiene dos ventajas: una es que, como en el caso anterior, permite que ahí la velocidad del fluido sea constante; la otra es que, aunque la superficie sea curva, podemos considerar que esa porción infinitesimal de superficie es plana. Estas dos ventajas permiten calcular un diferencial de flujo usando el caso 2.

Tomemos un punto \mathcal{P} de la superficie \mathcal{S} ; sea $d\mathcal{S}$ el área de una porción infinitamente pequeña de \mathcal{S} que contiene a \mathcal{P} , si $\vec{v}(\mathcal{P})$ es la velocidad del fluido en el punto \mathcal{P} , entonces el diferencial de flujo es

$$d\mathcal{F} = |\vec{v}(\mathcal{P})| \cos \alpha \, d\mathcal{S},$$

donde α es el ángulo que forma la dirección del fluido con el vector normal unitario a la superficie en ese diferencial (recordemos que, aunque en ese diferencial de superficie la velocidad es constante, no tiene que ir perpendicular a la superficie). Esta fórmula puede reescribirse así:

$$d\mathcal{F} = [\vec{v}(\mathcal{P}) \cdot \vec{N}(\mathcal{P})] d\mathcal{S},$$

donde $\vec{N}(\mathcal{P})$ es el vector normal unitario a \mathcal{S} en \mathcal{P} .

Sumando los diferenciales de flujo correspondientes a todos los pedacitos infinitesimales que conforman la superficie \mathcal{S} se tiene que el flujo total es:

$$\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} |\vec{v}(\mathcal{P})| \cos \alpha \, d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} [\vec{v}(\mathcal{P}) \cdot \vec{N}(\mathcal{P})] d\mathcal{S}.$$

A la integral resultante en el planteamiento del cálculo del flujo se le llama **integral de superficie**, porque el objeto donde se integran o suman los diferenciales de flujo es una superficie.

Forma compacta para la fórmula del flujo

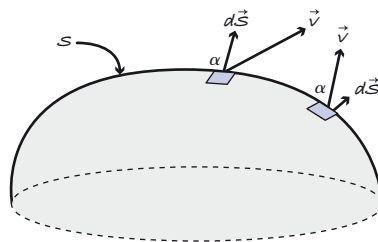
Si denotamos por $\vec{d\mathcal{S}}$ al vector cuya magnitud es $d\mathcal{S}$, el área de la porción infinitamente pequeña de la superficie que contiene a \mathcal{P} , y que va en la misma dirección de $\vec{N}(\mathcal{P})$, o sea,

$$\vec{d\mathcal{S}} = \vec{N}(\mathcal{P}) d\mathcal{S},$$

entonces la fórmula para el diferencial de flujo sería

$$d\mathcal{F} = [\vec{v}(\mathcal{P}) \cdot \vec{N}(\mathcal{P})] d\mathcal{S} = \vec{v}(\mathcal{P}) \cdot \vec{d\mathcal{S}},$$

y el flujo de un fluido con velocidad \vec{v} a través de la superficie \mathcal{S} se escribiría de manera compacta así: $\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \vec{d\mathcal{S}}$.



En resumen:

Caso	Fórmula para el flujo
1. Fluido con velocidad constante atravesando perpendicularmente una superficie plana	$F = \pm \vec{v} A$
2. Fluido con velocidad constante atravesando una superficie plana	$F = \vec{v} \cdot \vec{A}$
3. Fluido con velocidad variable atravesando perpendicularmente una superficie plana	$F = \iint_S \pm \vec{v} dA$
4. Fluido con velocidad variable atravesando una superficie	$F = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$

2. Recálculo del flujo en los casos de la SP-12

En este punto queremos repasar las diversas situaciones que se presentaron en la SP-12 para calcular el flujo, pero ahora utilizando la fórmula general obtenida al final de la consideración anterior; la idea es familiarizarnos en su uso para posteriormente avanzar a otras situaciones.

En todos los incisos se pide el flujo en dirección de $\vec{N} = \vec{k}$.

Solución de a). En este inciso, $\vec{v} = v\vec{i} + v\vec{j} + v\vec{k}$, donde la magnitud $|\vec{v}| = v$ es constante y positiva. El flujo a través de la compuerta \mathcal{S} debe de ser $F = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$. Queremos hacer notar que para calcular esta integral podemos desarrollar el producto punto del integrando $\vec{v} \cdot d\vec{S}$ de dos formas distintas:

- Como se conocen las componentes de los dos vectores $\vec{v} = v\vec{i} + v\vec{j} + v\vec{k}$ y $d\vec{S} = dS\vec{N} = dS\vec{k} = dS\vec{k}$, podemos multiplicar componente a componente y obtener: $\vec{v} \cdot d\vec{S} = v dS$.
- Como también conocemos las magnitudes de los vectores \vec{v} y $d\vec{S}$, además del coseno del ángulo entre ellos, podemos obtener el producto punto con la otra forma de calcularlo: producto de las magnitudes por el coseno del ángulo entre ellos. Veamos. En este ejemplo $\vec{v} = v\vec{i} + v\vec{j} + v\vec{k}$, entonces $|\vec{v}| = v$; y $|d\vec{S}| = |dS \cdot \vec{N}| = |dS \cdot \vec{k}| = dS$; además, sabemos que si α es el ángulo entre \vec{v} y $d\vec{S}$, entonces $\cos \alpha = 1$ porque \vec{v} y $d\vec{S}$ van en la misma dirección (el primero es $v\vec{k}$ y el segundo es $dS \cdot \vec{k}$) y $\alpha = 0$.

En cualquier caso tenemos que $\vec{v} \cdot d\vec{S} = v dS$ y, en consecuencia,

$$F = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S v dS = v \iint_S dS.$$

La última integral representa el área de (toda) la superficie \mathcal{S} , ya que es la suma de todos los diferenciales de área sobre la superficie; es decir,

$$\iint_S dS = \text{área de } \mathcal{S}.$$

Tenemos entonces que el flujo es $F = v(\text{área de } \mathcal{S}) = v(b-a)(d-c)$, (porque la superficie es un rectángulo de dimensiones $(b-a)$ y $(d-c)$). Por supuesto que este resultado coincide con la respuesta que se obtiene directamente al multiplicar la

velocidad del fluido por el área de la compuerta, fórmula que podemos usar porque la velocidad del fluido es constante y perpendicular a la compuerta.

Solución de b). En este caso el campo de velocidades está dado por la función (vectorial) $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{k}$ y la superficie $\mathcal{S}: 2 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5, z = 0$.

Calcularemos el flujo del campo $\vec{v}(x, y, z) = y\vec{k}$ a través de la superficie \mathcal{S} , considerando el vector normal unitario $\vec{N} = \vec{k}$, como está estipulado: utilizando de nuevo la fórmula general $\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot d\vec{S}$. Como $\vec{v} \cdot d\vec{S} = |\vec{v}| |d\vec{S}| \cos \alpha = y dS$, el flujo es $\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} y dS$.

Ya que estamos integrando sobre una superficie que está en el plano xy , el diferencial de área dS representa el área de una porción infinitamente pequeña del plano xy que se expresa así: $dS = dx dy$, o $dS = dy dx$, y que corresponde al área de un rectángulo infinitesimal de lados dx y dy . Tenemos entonces que $\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} y dS = \iint_{\mathcal{S}} y dx dy$; de la última integral debemos interpretar que sumamos para todas las x y todas las y de los puntos que pertenecen a la superficie \mathcal{S} . Ahora bien, como los puntos de \mathcal{S} cumplen que $2 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5$, se tiene, por lo tanto, que $\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} y dx dy = \int_{y=1}^{y=5} \int_{x=2}^{x=5} y dx dy$ lo que indica realizar dos integrales iteradas: integrar parcialmente respecto a x , evaluar en x , y posteriormente integrar respecto a y lo que haya resultado, para finalmente evaluar en los límites de esta última variable:

$$\mathcal{F} = \int_{y=1}^{y=5} \int_{x=2}^{x=5} y dx dy.$$

$$\int_{x=2}^{x=5} y dx = [yx]_{x=2}^{x=5} = 5y - 2y = 3y \Rightarrow \mathcal{F} = \int_{y=1}^{y=5} 3y dy =$$

$$\left[\frac{3y^2}{2} \right]_1^5 = \frac{75}{2} - \frac{3}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

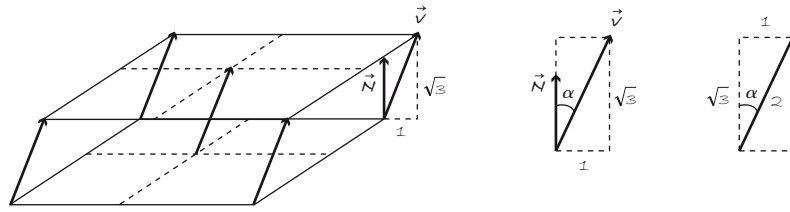
Análogamente, se puede plantear la integral $\int_{x=2}^{x=5} \int_{y=1}^{y=5} y dy dx$, que corresponde a un cambio en el orden de integración para representar el mismo flujo \mathcal{F} .

Solución de c). Consideremos el campo vectorial dado por $\vec{v}(x, y, z) = 0\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$ y la superficie $\mathcal{S}: 2 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5, z = 0$.

Para calcular el flujo utilizaremos de nuevo la fórmula $\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot d\vec{S}$, y para hacerlo calcularemos el producto punto de dos formas diferentes, igual que en el inciso a).

- Componente a componente. $\vec{v}(x, y, z) = 0\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$ y $d\vec{S} = dS \cdot \vec{N} = dS \cdot \vec{k}$, por lo tanto, $\vec{v} \cdot d\vec{S} = \sqrt{3} dS$.
- Obteniendo la magnitudes y el coseno del ángulo entre los dos vectores.

$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, |d\vec{S}| = |dS \cdot \vec{N}| = |dS \cdot \vec{k}| = dS$; para obtener el coseno entre los vectores es suficiente observar la siguiente figura.



De ahí que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y, por lo tanto, $\vec{v} \cdot d\vec{S} = |\vec{v}| |d\vec{S}| \cos \alpha = 2 dS \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} dS$.

En cualquier caso se tiene que el flujo es igual a

$$\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{3} dS = \sqrt{3} \iint_{\mathcal{S}} dS = \sqrt{3} (\text{área de } \mathcal{S}) = \sqrt{3} (12) = 20.7846.$$

3. Extensión de la noción de flujo a un campo vectorial en general

El flujo es una medida asociada a un fluido en relación con una superficie. El movimiento del fluido está caracterizado por sus vectores de velocidad; se habla del flujo del campo de velocidades a través de una superficie (en una dirección dada por un vector normal a la superficie) y se obtiene por medio de una integral de superficie.

La idea de flujo como medida puede extenderse a un campo vectorial en general. Se puede hablar, por ejemplo, del flujo del campo eléctrico, del campo magnético o del campo gravitacional, a través de una superficie, aunque no haya fluido alguno que la “atraviese”. En general, el flujo de un campo vectorial \vec{E} a través de una superficie \mathcal{S} en una dirección dada (establecida por una elección previa de los vectores normales a la superficie) es la integral de superficie

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Lo anterior resulta haciendo la analogía con lo que ocurre con un campo de velocidades. En el caso de que la superficie \mathcal{S} sea cerrada (con un lado interior y uno exterior, la cáscara o frontera de un sólido, como una esfera, por ejemplo) se conviene calcular el flujo que atraviesa la superficie hacia fuera. Es decir, de las dos posibilidades que cada punto de la superficie tiene en cuanto a colocar ahí un vector normal unitario, se elige por convención aquella en la que este vector apunta hacia fuera.

El flujo del campo \vec{E} sobre una superficie cerrada \mathcal{S} se escribe así:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

donde el círculo sobre la integral doble enfatiza el hecho de que la superficie es cerrada.

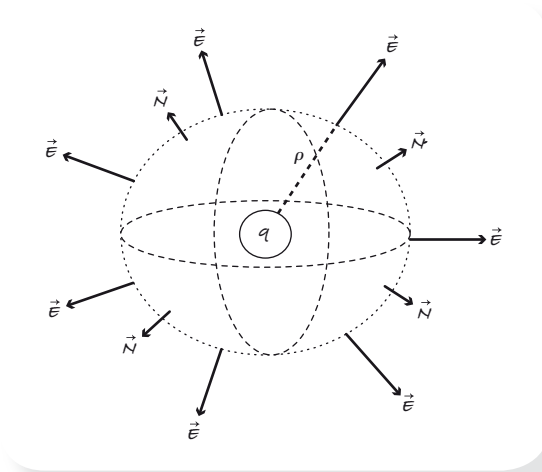
4. Cálculos especiales de la integral de superficie

En este punto presentaremos algunas situaciones en las que el cálculo de la integral de superficie puede simplificarse a causa de la relación que guarda el campo con la normal a la superficie.

- a) Consideremos el caso especial en que un campo \vec{E} es de magnitud constante y va en dirección de la normal a la superficie \mathcal{S} en cada uno de sus puntos; tendremos entonces que:

$$\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{S}} |\vec{E}| \cos 0 \, ds = \iint_{\mathcal{S}} |\vec{E}| \, ds = |\vec{E}| \iint_{\mathcal{S}} ds = |\vec{E}| (\text{área de } \mathcal{S}).$$

Un importante ejemplo donde se cumple esta relación entre campo y superficie es el del campo eléctrico que genera una carga puntual de q coulombs y la esfera de radio ρ con centro en la carga. Este campo es radial (hacia fuera cuando $q > 0$) y tiene magnitud constante en todos los puntos de la esfera, como se ilustra en la siguiente figura.



Tenemos entonces que el flujo del campo eléctrico a través de la esfera es

$$\mathcal{F} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}| (\text{área de la esfera})$$

Si \mathcal{P} es un punto de la esfera de radio ρ , se sabe que $|\vec{E}(\mathcal{P})| = k \frac{q}{\rho^2}$, entonces el flujo está dado por $\mathcal{F} = |\vec{E}| (\text{área de la esfera}) = \left(k \frac{q}{\rho^2}\right) (4 \pi \rho^2)$; o sea, $\mathcal{F} = 4 \pi k q$.

Este resultado se concilia con la llamada **ley de Gauss**: El flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga neta encerrada por la superficie.

También puede apreciarse que el flujo no depende del radio de la esfera, y la explicación para esto es que mientras el área superficial de la esfera es directamente proporcional al cuadrado de su radio, la magnitud del campo en los puntos de la superficie de la esfera es inversamente proporcional al cuadrado del mismo. Puede decirse que el crecimiento en superficie es compensado con la disminución de la magnitud del campo cuando el radio de la esfera aumenta.

- b) Consideremos el caso especial en que el campo es tangente a la superficie en todos sus puntos. En este caso el ángulo entre la normal a la superficie y el campo es de 90° y, por lo tanto, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = |\vec{E}| |d\vec{S}| \cos 90^\circ = 0$, entonces el flujo $\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ debe ser cero.

Estas condiciones se cumplen con el campo magnético \vec{B} generado por una corriente eléctrica de intensidad constante que está presente en un alambre largo recto y tomando \mathcal{S} como la superficie lateral de un cilindro con eje en el alambre. \vec{B} es circular y, por lo tanto, tangente a \mathcal{S} . Así, el flujo del campo magnético a través de \mathcal{S} es cero.

Si \mathcal{S} incluye, además de la superficie cilíndrica, las dos tapas, tenemos que el flujo a través de esta superficie, ahora cerrada, sigue siendo cero porque el campo magnético \vec{B} en las tapas es perpendicular al vector normal (que va hacia fuera del cilindro y paralelo al alambre). Ve la siguiente figura.

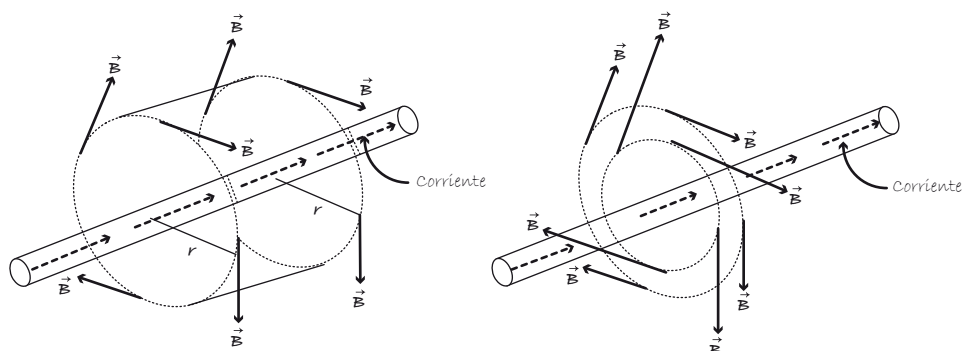


Figura de la izquierda. Disposición sobre una superficie cilíndrica de los vectores \vec{B} del campo magnético que induce una línea de corriente con intensidad constante sobre el eje del cilindro.

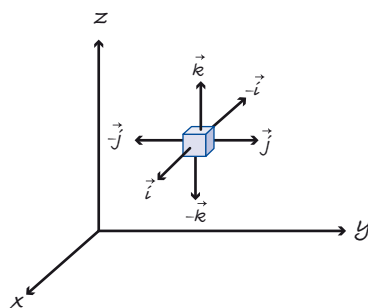
Figura de la derecha. Disposición sobre una de las tapas de un cilindro cerrado de los vectores \vec{B} del campo magnético que induce una línea de corriente con intensidad constante sobre el eje del cilindro.

Este resultado se concilia con la ley de Gauss para el magnetismo: El flujo de un campo magnético a través de una superficie cerrada es cero.

c) *Flujo de un campo a través de la superficie de una caja rectangular.* Calcularemos el flujo a través de las seis caras de una caja cerrada con lados paralelos a los planos coordenados.

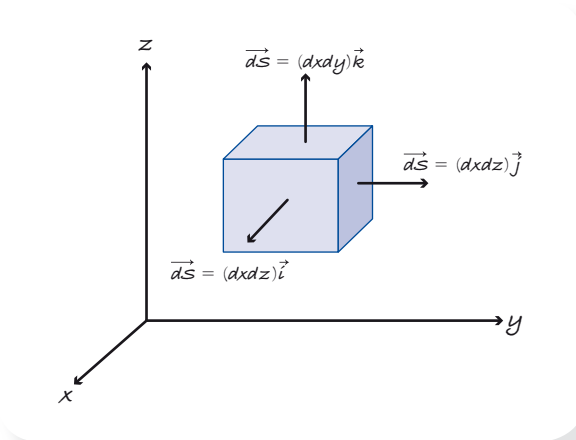
Consideremos al campo vectorial $\vec{E}(x, y, z) = E_1(x, y, z)\vec{i} + E_2(x, y, z)\vec{j} + E_3(x, y, z)\vec{k}$ y una caja rectangular con aquellas características. Para cada una de las caras calcularemos el flujo. El flujo a través de la superficie (o flujo total) será la suma del flujo de todas las caras. Conviene hacer una serie de observaciones para hacer los cálculos del flujo.

- Como la superficie a través de la cual se quiere calcular el flujo es cerrada, el vector normal a la superficie en cada punto va hacia fuera de la caja.
- Tomando en cuenta lo anterior y que las caras de la caja son paralelas a los planos coordenados, los vectores normales unitarios para las distintas caras son como lo indica la siguiente figura.



- Todos los puntos de una cara de la caja tienen una coordenada fija (porque la cara pertenece a un plano paralelo a uno de los planos coordenados; este tipo de planos se caracteriza porque sus puntos tienen un valor fijo de una de las coordenadas). Luego, el diferencial de área de una cara es el producto de los diferenciales de las dos variables que no tienen valor fijo. Este diferencial de área multiplicado por el vector normal unitario correspondiente a la cara dada nos da el vector $d\vec{S}$ de la fórmula del flujo $\mathcal{F} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$.

A continuación mostramos una figura con algunos de estos vectores.

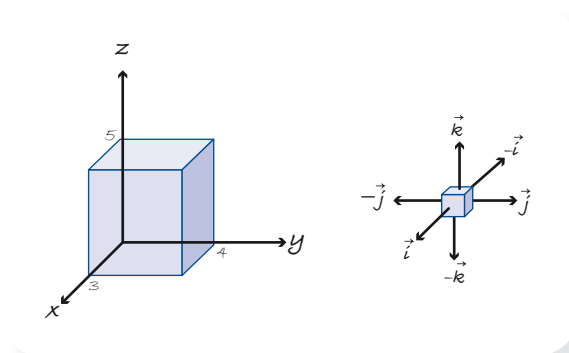


- Al hacer el producto punto de $\vec{E}(x, y, z) = E_1(x, y, z)\vec{i} + E_2(x, y, z)\vec{j} + E_3(x, y, z)\vec{k}$ con alguno de los vectores $d\vec{S}$ se cancelan dos de las componentes y resulta el producto de la componente restante y el diferencial de área correspondiente. Aunque las componentes del campo son funciones de tres variables restringidas a una cara, se pueden ver como funciones de dos variables ya que una de ellas tiene un valor fijo en los puntos de esa cara.

Esto indica que la integral de superficie para calcular el flujo del campo por cualquiera de las caras de la caja se traduce en una integral doble.

Consideremos, por ejemplo, el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z)\vec{i} + xy\vec{j} + z^2\vec{k}$.

Determinaremos el flujo de adentro hacia fuera a través de las caras de una caja con lados paralelos a los planos coordenados y vértices opuestos en $(0, 0, 0)$ y $(3, 4, 5)$.

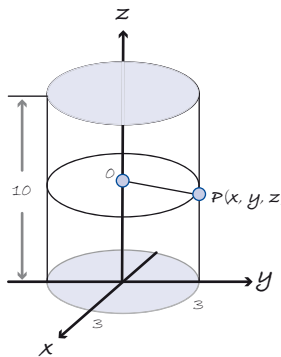


El cuadro siguiente muestra los elementos correspondientes para calcular el flujo en cada cara.

Cara/ elemento	Vector normal unitario \vec{N}	Vector infinitesimal normal \vec{dS}	Diferencial de flujo $dF = \vec{F} \cdot \vec{dS}$	Flujo F
C_F Cara del frente $x=3$	$\vec{N} = \vec{i}$	$\vec{dS} = dzdy\vec{i}$	$dF = (3+y+z)dzdy$	$F_{C_F} = \int_{y=0}^{y=4} \int_{z=0}^{z=5} (3+y+z)dzdy = 150$
C_A Cara de atrás $x=0$	$\vec{N} = -\vec{i}$	$\vec{dS} = -dzdy\vec{i}$	$dF = -(y+z)dzdy$	$F_{C_A} = -\int_{y=0}^{y=4} \int_{z=0}^{z=5} (y+z)dzdy = -90$
C_{iz} Cara izquierda $y=0$	$\vec{N} = -\vec{j}$	$\vec{dS} = -dzdx\vec{j}$	$dF = 0$	$F_{C_{iz}} = 0$
C_D Cara derecha $y=4$	$\vec{N} = \vec{j}$	$\vec{dS} = dzdx\vec{j}$	$dF = 4xzdxdz$	$F_{C_D} = \int_{x=0}^{x=3} \int_{z=0}^{z=5} 4xzdxdz = 225$
C_S Cara superior $z=5$	$\vec{N} = \vec{k}$	$\vec{dS} = dydx\vec{k}$	$dF = 25dydx$	$F_{C_S} = \int_{x=0}^{x=2} \int_{z=0}^{z=4} 25dydx = 300$
C_{in} Cara inferior $z=0$	$\vec{N} = -\vec{k}$	$\vec{dS} = -dydx\vec{k}$	$dF = 0$	$F_{C_{in}} = 0$

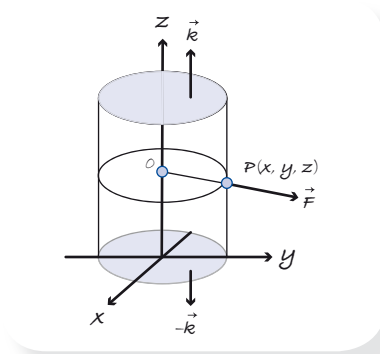
Flujo total = $150 - 90 + 0 + 225 + 300 + 0 = 585$.

d) *Flujo a través un cilindro.* Calcularemos el flujo de adentro hacia fuera del campo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$ a través de un cilindro cerrado (es decir, incluyendo las tapas) de radio 3 y altura 10 cuyo eje es el eje z.



Haremos algunos comentarios alrededor de esta situación que ayuden a visualizar el procedimiento que efectuaremos para el cálculo del flujo.

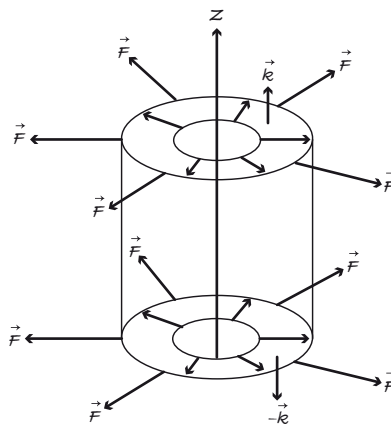
- Es conveniente dividir la superficie completa en tres partes en atención a la característica del vector normal correspondiente: la superficie lateral del cilindro, la tapa superior y la tapa inferior. Si tomamos un punto \mathcal{P} en la superficie lateral, un vector normal hacia fuera del cilindro en este punto puede obtenerse de la siguiente manera. Consideremos el plano perpendicular al eje del cilindro y que pase por \mathcal{P} ; la intersección del cilindro con este plano es una circunferencia con centro en \mathcal{O} , el punto del eje con la misma coordenada z que el punto \mathcal{P} (ve la figura anterior), entonces, un vector normal al cilindro, en dirección hacia fuera en \mathcal{P} es el vector radial correspondiente a \mathcal{P} , que coincide, en relación con el plano de corte, con el vector de posición del punto \mathcal{P} . Respecto a las tapas del cilindro, como estas pertenecen a planos paralelos al plano xy , los vectores normales unitarios hacia fuera del cilindro correspondientes son \vec{k} para la tapa superior y $-\vec{k}$ para la inferior. Observa la siguiente figura:



- ¿Qué diferencia hay entre los campos vectoriales $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ y $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$? El primero está definido solo en el plano xy , es radial y, de hecho, es el campo de vectores de posición de los puntos en el plano. El segundo está definido en todo el espacio tridimensional, pero en cada plano paralelo al xy es una copia del primero.

El cálculo del flujo:

Tanto en la tapa superior como la inferior el diferencial de flujo $dF = \vec{F} \cdot d\vec{S}$ es 0 porque $d\vec{S}$ (que sigue la dirección del vector normal unitario \vec{k} o $-\vec{k}$) es perpendicular a \vec{F} (que son vectores en el plano paralelo al xy , correspondiente a cada tapa).



Los vectores del campo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$ son tangentes a las caras del cilindro centrado en el eje z .

Así, el flujo total a través de toda la superficie corresponde al flujo a través de la superficie lateral. Calculemos este. Como el campo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$ y el vector $d\vec{S}$ llevan la misma dirección en cada punto de la superficie lateral (de hecho, ambos son perpendiculares a la superficie lateral) entonces el diferencial de flujo es $dF = \vec{F} \cdot d\vec{S} = |\vec{F}|dS$. Ahora bien, se tiene que $|\vec{F}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y como para todo punto (x, y, z) del cilindro (su parte lateral) se cumple que $x^2 + y^2 = 9$ (de hecho, esta es la ecuación del cilindro) tenemos que el diferencial del flujo es $dF = \vec{F} \cdot d\vec{S} = |\vec{F}|dS = 3dS$.

Finalmente, el flujo es $F = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S 3dS = 3 \iint_S dS$, donde la última integral corresponde al área lateral del cilindro. El área lateral de un cilindro de radio r y de altura h es $2\pi rh$. Entonces el flujo total es $F = (3)2\pi(3)(10) = 180\pi$.

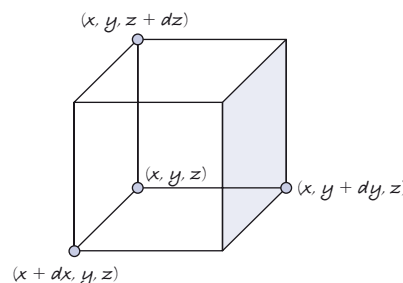
5. La divergencia de un campo vectorial y el teorema de la divergencia (o teorema de Gauss)

En este punto desarrollaremos un concepto central que tiene que ver con la noción de flujo para entender ciertos aspectos de la naturaleza de un campo vectorial (de velocidades o fuerzas) o del fenómeno físico que dicho campo modela; nos referimos al concepto de divergencia de un campo. Asimismo estableceremos un resultado fundamental del Cálculo en relación con este concepto, el teorema de la divergencia (o teorema de Gauss). En lo que sigue denotaremos al flujo de un campo a través de una superficie por el símbolo Φ , que es ampliamente usado en los libros de Física.

En principio el teorema de la divergencia nos permitirá calcular el flujo a través de una superficie cerrada de un modo distinto al de utilizar la fórmula $\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Más adelante veremos cómo este teorema contribuye a enriquecer el modo de percibir algunas leyes de la electricidad y el magnetismo.

Nos apoyaremos en los siguientes resultados para dar significado al concepto de divergencia, así como para establecer y probar el mencionado teorema.

a) *El flujo a través de la superficie de una caja infinitesimal.* Tomemos una caja infinitesimal con lados paralelos a los planos coordenados y consideremos al campo $\vec{E}(x, y, z) = E_1(x, y, z)\vec{i} + E_2(x, y, z)\vec{j} + E_3(x, y, z)\vec{k}$; vamos a calcular el flujo de \vec{E} a través de la superficie de esta caja, para ello notemos que el campo, aunque variable, puede suponerse como constante en cada una de las caras. Consideremos que el valor del campo en el vértice (x, y, z) de la caja (ve la siguiente figura) es el mismo para todos los puntos de la cara de atrás, los de la izquierda y los de la cara inferior; que el valor en $(x + dx, y, z)$ es el mismo para todos los puntos de la cara de enfrente; que el valor en $(x, y + dy, z)$ es el mismo en todos los de la cara derecha y que el valor en $(x, y, z + dz)$ es el mismo en todos los de la cara superior.



Se tiene entonces que:

El flujo en la cara de enfrente es:

$$\vec{E}(x + dx, y, z) \cdot d\vec{S} = (\mathcal{E}_1(x + dx, y, z)\vec{i} + \mathcal{E}_2(x + dx, y, z)\vec{j} + \mathcal{E}_3(x + dx, y, z)\vec{k}) \cdot (dydz\vec{i}) = \mathcal{E}_1(x + dx, y, z)dydz.$$

El flujo en la cara de atrás es:

$$\vec{E}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = (\mathcal{E}_1(x, y, z)\vec{i} + \mathcal{E}_2(x, y, z)\vec{j} + \mathcal{E}_3(x, y, z)\vec{k}) \cdot (-dydz\vec{i}) = -\mathcal{E}_1(x, y, z)dydz.$$

El flujo en la cara derecha es:

$$\vec{E}(x, y + dy, z) \cdot d\vec{S} = (\mathcal{E}_1(x, y + dy, z)\vec{i} + \mathcal{E}_2(x, y + dy, z)\vec{j} + \mathcal{E}_3(x, y + dy, z)\vec{k}) \cdot (dxdz\vec{j}) = \mathcal{E}_2(x, y + dy, z)dxdz.$$

El flujo en la cara izquierda es:

$$\vec{E}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = (\mathcal{E}_1(x, y, z)\vec{i} + \mathcal{E}_2(x, y, z)\vec{j} + \mathcal{E}_3(x, y, z)\vec{k}) \cdot (-dxdz\vec{k}) = -\mathcal{E}_2(x, y, z)dxdz.$$

El flujo en la cara superior es:

$$\vec{E}(x, y, z + dz) \cdot d\vec{S} = (\mathcal{E}_1(x, y, z + dz)\vec{i} + \mathcal{E}_2(x, y, z + dz)\vec{j} + \mathcal{E}_3(x, y, z + dz)\vec{k}) \cdot (dxdy\vec{k}) = \mathcal{E}_3(x, y, z + dz)dxdy.$$

El flujo en la cara inferior es:

$$\vec{E}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = (\mathcal{E}_1(x, y, z)\vec{i} + \mathcal{E}_2(x, y, z)\vec{j} + \mathcal{E}_3(x, y, z)\vec{k}) \cdot (-dxdy\vec{k}) = -\mathcal{E}_3(x, y, z)dxdy.$$

Por supuesto que la suma de todos estos flujos es el flujo total a través de la superficie de la caja, pero conviene para nuestros propósitos sumar los primeros dos, luego el siguiente par y después los últimos dos. Veamos.

Flujo de la cara de atrás + Flujo de la cara de enfrente:

$$\mathcal{E}_1(x + dx, y, z)dydz - \mathcal{E}_1(x, y, z)dydz = [\mathcal{E}_1(x + dx, y, z) - \mathcal{E}_1(x, y, z)]dydz = \left[\frac{\mathcal{E}_1(x + dx, y, z) - \mathcal{E}_1(x, y, z)}{dx} \right]dxdydz.$$

Observemos que lo que está en el paréntesis rectangular es precisamente la derivada parcial de \mathcal{E}_1 respecto a x . Es decir:

$$\text{Flujo de la cara de atrás + Flujo de la cara de enfrente: } \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x}(x, y, z)dxdydz.$$

De modo similar (te invitamos a verificarlo) se tiene:

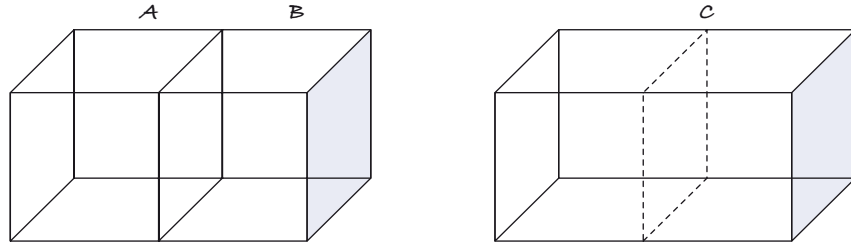
$$\text{Flujo de la cara derecha + Flujo de la cara izquierda: } \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y}(x, y, z)dxdydz.$$

$$\text{Flujo de la cara superior + Flujo de la cara inferior: } \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z}(x, y, z)dxdydz.$$

Tenemos entonces que el flujo total a través de la superficie de la caja infinitesimal es:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z}(x, y, z) \right] dx dy dz.$$

b) *La suma de los flujos de dos cajas con un lado en común.* Supongamos que F_A es el flujo de un campo a través de la superficie de una caja A . Imaginemos otra caja B con flujo F_B y que tiene un lado común con la primera, como se muestra en la figura siguiente. La unión de las dos cajas A y B forman la caja C .



Si se calcula el flujo a través de la superficie de la caja C , veremos que corresponde a la suma de los flujos de las cajas A y B , es decir:

$$F_C = F_A + F_B.$$

Esta afirmación se apoya en el hecho de que, aunque el cálculo de F_A incluye el flujo de la cara derecha de la caja A y el de F_B , incluye el flujo de la cara izquierda de la caja B , al considerar la suma $F_A + F_B$, los flujos de estas dos caras se eliminan porque solo difieren en el signo y esto se explica porque para la cara derecha de la caja A , el vector normal unitario es $\vec{N} = \vec{j}$, mientras que para la cara izquierda de la caja B es $\vec{N} = -\vec{j}$ (recordemos que la dirección en la que se calcula el flujo a través de una superficie cerrada es hacia fuera), tomemos en cuenta también que el campo es el mismo en las dos caras por estar juntas.

Los resultados descritos en los dos incisos anteriores ayudan a visualizar el flujo a través de una superficie cerrada de un modo diferente al que se venía considerando en los puntos anteriores de estas consideraciones, dando lugar, de hecho, al teorema de la divergencia. Veamos.

Consideremos una superficie cerrada \mathcal{S} ; en cada punto (x, y, z) de la región \mathcal{V} del espacio encerrada por la superficie coloquemos una caja infinitesimal y calculemos el flujo del campo \vec{E} a través de su superficie. Al sumar los flujos de todas las cajas infinitesimales se tendrá el flujo a través de la superficie \mathcal{S} , ya que en este proceso sólo “sobreviven” los flujos de las superficies externas, y las superficies externas “últimas” forman precisamente la superficie \mathcal{S} . Por otra parte, el flujo a través de la cajita infinitesimal colocada en cada punto (x, y, z) está dado, de acuerdo con lo visto en el inciso a), por la expresión

$$\left[\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} \right] dx dy dz.$$

Por ello podemos escribir el flujo a través de la superficie \mathcal{S} así:

$$\Phi = \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} \right) dV$$

Donde $dV = dx dy dz$ (el diferencial de volumen o volumen de la caja infinitesimal de dimensiones dx , dy y dz).

Combinando esta forma de ver el flujo con la que obtuvimos en el punto 3 de estas consideraciones obtenemos la siguiente igualdad conocida como **teorema de la divergencia** (o teorema de Gauss):

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} \right) dV.$$

Conviene en este momento hacer una serie de observaciones en relación con este resultado para lograr mayor profundidad en su significado y valoración de su importancia.

- Ya que $\left(\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} \right) dV$ corresponde al flujo de una caja infinitesimal, según el inciso a) de estas consideraciones, y la suma de estos flujos corresponde al flujo total a través de la superficie, podemos decir que esta cantidad infinitesimal corresponde a un diferencial del flujo y escribirlo así:

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} \right) dV.$$

De aquí se obtiene que

$$\frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z}.$$

Esta magnitud se conoce como **divergencia** del campo \vec{E} . Es decir, la divergencia de un campo es la razón (instantánea) de cambio del flujo respecto al volumen (en un determinado punto). La divergencia del campo \vec{E} suele denotarse como $\text{Div}(\vec{E})$.

Tomemos por ejemplo el campo $\vec{E}(x, y, z) = (x + y + z)\vec{i} + xyz\vec{j} + z^2\vec{k}$ y calculemos su divergencia. En este caso, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1(x, y, z) = x + y + z$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2(x, y, z) = xyz$ y $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_3(x, y, z) = z^2$, por lo tanto,

$$\text{Div}(\vec{E}) = \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} = 1 + xz + 2z.$$

Notemos que la divergencia de un campo vectorial es una función (con números reales como valores) de tres variables, en general. De hecho, se puede escribir $\text{Div}(\vec{E}) = \text{Div}(\vec{E})(x, y, z)$, cuando se quiere enfatizar que la divergencia es una función de tres variables. En el ejemplo anterior se tiene en particular que $\text{Div}(\vec{E})(1, 1, 1) = 4$ y $\text{Div}(\vec{E})(1, -2, -2) = -5$.

Estos números concretos tienen un significado análogo al del valor de una derivada de una función de una variable; recordemos esta interpretación y luego señalemos la analogía con los valores que arroja la divergencia.

Digamos que para una función $y = f(x)$ se sabe que $f'(1) = 4$. Pensemos primero en una función cuya razón de cambio es constante (de hecho, una función lineal) e igual a 4; esto significa que los valores de y crecerán (por ser positiva la razón de cambio) a un ritmo de 4 unidades por cada unidad que se avance en x . Con ello, si se recorre en el eje de las x un intervalo de longitud L , el valor de la variable y aumentará $4L$. Pero que la derivada sea 4 en el punto $x = 1$ significa que en las cercanías de ese punto la función $y = f(x)$ se comporta como una función lineal (con razón de cambio constante e igual a 4). En lo local las funciones son lineales (por lo menos para las funciones con derivada continua).

Volvamos ahora al valor $\text{Div}(\vec{E})(1, 1, 1) = 4$. Siendo la divergencia la razón de cambio del flujo respecto al volumen, podemos dar la siguiente interpretación en relación con el punto concreto $\mathcal{P}(1, 1, 1)$ y el valor de 4.

Imaginemos que \vec{E} es un campo que tiene una divergencia constante e igual a 4 (considera, por ejemplo, el campo $\vec{E}(x, y, z) = 4y\vec{j}$). Consideremos además una superficie \mathcal{S} que encierra una región \mathcal{R} del espacio con volumen v . Ya que el flujo de \vec{E} a través de la superficie \mathcal{S} puede calcularse según la fórmula

$$\Phi = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV,$$

se tendría que

$$\Phi = \int_{\mathcal{R}} 4 dV = 4 \int_{\mathcal{R}} dV = 4: \text{Volumen de } \mathcal{R} = 4v,$$

donde hemos usado el hecho de que la suma de todos los diferenciales de volumen de una región del espacio corresponde al volumen de esa región. Entonces se ve fácilmente que el flujo crece a razón constante 4 respecto al volumen.

Que en el punto $\mathcal{P}(1, 1, 1)$ la divergencia sea 4, indica que en las cercanías de ese punto el campo \vec{E} es tal que su flujo a través de superficies cerradas es proporcional a los volúmenes que encierran.

Haremos un comentario adicional sobre el significado de la divergencia en relación con el signo que pueda tener en algún punto. La divergencia en un punto es la razón de cambio del flujo a través de una superficie de una caja infinitesimal respecto al volumen. Como el flujo tiene signo y se conviene que se calcula siempre en dirección hacia fuera, una divergencia positiva indicará que en ese punto hay una especie de “fuente” cuya magnitud del aporte dependerá de la magnitud de la divergencia. Una divergencia negativa indicará que en ese punto hay una especie de “sumidero” y cuanto mayor sea la divergencia en valor absoluto, tanto mayor será “lo que se va por ahí” o lo que se consume.

El teorema de la divergencia puede ahora interpretarse en términos de “fuentes” y “sumideros”. Veamos. El teorema establece que

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{R}} \text{Div}(\vec{E}) dV.$$

“El flujo de \vec{E} a través de la superficie cerrada \mathcal{S} es igual a la suma de lo que se aporta (en una fuente) o se consume (en un sumidero) en cada punto del espacio \mathcal{R} limitado por \mathcal{S} .”

Existe una manera compacta (y elegante también) de escribir la suma de las parciales para la divergencia de un campo; la describimos a continuación.

La divergencia $\frac{\partial \epsilon_1}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_2}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_3}{\partial z}$ puede verse como el “producto punto” entre el operador $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ (llamado **operador nabla**) y el campo $\vec{E} = \epsilon_1 \vec{i} + \epsilon_2 \vec{j} + \epsilon_3 \vec{k}$. En este sentido, por ejemplo, la parcial de ϵ_1 respecto a x , $\frac{\partial \epsilon_1}{\partial x}$, se ve como el “producto” entre $\frac{\partial}{\partial x}$ (que es un mero símbolo) y ϵ_1 . Es decir,

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_2}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_3}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (\epsilon_1 \vec{i} + \epsilon_2 \vec{j} + \epsilon_3 \vec{k}) = \nabla \cdot \vec{E}.$$

Podemos escribir en forma compacta la divergencia del campo \vec{E} como:

$$\text{Div}(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E}.$$

De esta manera el teorema de la divergencia puede reescribirse así:

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV.$$

Una última observación que queremos hacer en este momento es relativa a las diferentes notaciones que hemos utilizado para los tipos de integrales que se han considerado. Para una integral de superficie hemos utilizado indistintamente las notaciones $\iint_{\mathcal{S}}$ y $\int_{\mathcal{S}}$, la primera nos recuerda que se integra a “lo largo y ancho” de la superficie \mathcal{S} , y que eventualmente pudiera ser necesario integrar dos veces. De hecho, una superficie se considera una figura geométrica bidimensional. Si la superficie se visualiza como un agregado de curvas, la doble integral puede pensarse como si la primera integrara a lo largo de una de esas curvas y la segunda sumara para todas las curvas lo que resultó con la primera integral. Ya sabemos que las notaciones $\iint_{\mathcal{S}}$ y $\oint_{\mathcal{S}}$ se ligán con el hecho de que la superficie es cerrada. Las notaciones $\int_{\mathcal{S}}$ y $\oint_{\mathcal{S}}$ solo son abreviaciones de $\iint_{\mathcal{S}}$ y $\iint_{\mathcal{S}}$, respectivamente, en el entendido de que se integra sobre una superficie \mathcal{S} .

Una figura geométrica propiamente tridimensional puede pensarse como generada por el movimiento de una superficie; hemos usado la notación $\int_{\mathcal{R}}$ para referirnos a una integral sobre esa región del espacio. También es posible utilizar la notación $\iiint_{\mathcal{R}}$ cuando se quiere enfatizar la tridimensionalidad de \mathcal{R} y la eventualidad de integrar tres veces. Cuando este es el caso, hablamos de una integral de volumen.

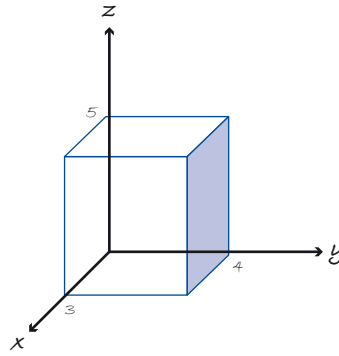
6. Aplicaciones de la divergencia y el teorema de la divergencia

En este punto mostraremos cómo este concepto y su teorema son utilizados para caracterizar el comportamiento de algunos fenómenos que se estudian en la mecánica de fluidos y en la electricidad y el magnetismo; esto lo haremos en los últimos dos incisos de los tres que contiene este punto. En el primer inciso utilizaremos el teorema de la divergencia para calcular el flujo como una alternativa a la forma en que se utiliza la integral de superficie; contar con esta posibilidad de cálculo pudiera ser importante en algún momento.

a) En estas consideraciones retomamos el ejemplo desarrollado en el inciso c) del punto 4. Cálculos especiales de la integral de superficie:

$$\text{En él se considera el campo } \vec{E}(x, y, z) = (x + y + z)\vec{i} + xyz\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

Se pide calcular el flujo (hacia afuera) a través de las caras de una caja con lados paralelos a los planos coordenados y vértices opuestos en $(0, 0, 0)$ y $(3, 4, 5)$.



Se calculó el flujo en cada cara utilizando la integral de superficie (integral doble). Se obtuvo que el flujo a través de la superficie total es 585. En símbolos, se encontró que

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 585.$$

Ahora bien, el teorema de la divergencia establece que

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \vec{E}) dV,$$

donde \mathcal{R} es la caja completa (es decir, incluye su interior). El lado izquierdo es 585. La intención ahora es calcular la integral (triple) del lado derecho de la igualdad del teorema; por supuesto que debemos obtener como resultado el mismo número. Veamos.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{Div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = 1 + xz + 2z \text{ (un poco antes ya}$$

habíamos obtenido esto). El diferencial de volumen en coordenadas cartesianas es $dV = dx dy dz$.

Ya que la región \mathcal{R} del espacio la constituyen los puntos (x, y, z) que satisfacen las desigualdades $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 5$; la integral triple con sus respectivos límites quedaría así:

$$\iiint_{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \int_{z=0}^5 \int_{y=0}^4 \int_{x=0}^3 (1 + xz + 2z) dx dy dz.$$

Integrando la primera (de adentro hacia fuera) respecto a x (manteniendo las otras variables como constantes) tenemos:

$$\int_{x=0}^3 (1 + xz + 2z) dx = \left[x + \frac{1}{2} x^2 z + 2xz \right]_{x=0}^3 = 3 + 10.5z.$$

Si integramos ahora este resultado respecto a y (en la segunda integral), tenemos:

$\int_{y=0}^4 (3 + 10.5z)dy = [3y + 10.5zy]_{y=0}^4 = 12 + 42z$ (la z se mantuvo como constante).

Finalmente, integrando esto último respecto a z tenemos:

$$\int_{z=0}^5 (12 + 42z)dz = [12z + 21z^2]_{z=0}^5 = 585.$$

Entonces,

$$\int_{z=0}^5 \int_{y=0}^4 \int_{x=0}^3 (1 + xz + 2z)dx dy dz = 585.$$

Como era de esperarse. En la Tarea 9 hay algunos ejercicios en los que se pide que “verifique” la validez del teorema de la divergencia para algunas situaciones concretas; la intención es que corrobore que empleando la integral doble y la triple se llega al mismo resultado.

- b) La siguiente aplicación tiene que ver con la ley de Gauss de la electricidad y el magnetismo. La **forma integral** de esta ley se establece así:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\mathcal{Q}_{enc}}{\epsilon_0}.$$

En palabras: El flujo del campo eléctrico \vec{E} a través de una superficie cerrada \mathcal{S} es proporcional a la carga neta \mathcal{Q}_{enc} encerrada en \mathcal{S} ; $\frac{1}{\epsilon_0}$ es la constante de proporcionalidad.

El teorema de la divergencia permite darle otra forma a esta ley, llamada **forma diferencial**. Veamos.

Se tiene que si ρ es la densidad de carga eléctrica, entonces ρdV es un diferencial de carga, es decir, $d\mathcal{Q} = \rho dV$. Al integrar (o sumar) sobre la región del espacio \mathcal{R} (encerrada por la superficie \mathcal{S}) se consigue la carga eléctrica total encerrada ahí. Es decir,

$$\mathcal{Q}_{enc} = \iiint_{\mathcal{R}} \rho dV.$$

Entonces la forma integral de la ley de Gauss puede escribirse así:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\epsilon_0} \rho dV.$$

Combinando esta igualdad con la del teorema de la divergencia:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \vec{E}) dV,$$

se tiene que

$$\iiint_{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\epsilon_0} \rho dV.$$

Usando un resultado de las matemáticas que dice que cuando dos integrales son iguales para “cualquier” región de integración (que es nuestro caso) entonces los integrandos deben ser iguales.

Es decir,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

que es lo que se conoce **ley de Gauss en forma diferencial**.

Vale la pena hacer los siguientes comentarios acerca de estas formas que adopta la ley de Gauss.

- La forma integral de la ley involucra una condición global que debe cumplir el campo eléctrico: el flujo (total) a través de la superficie cerrada es proporcional a la carga (total) encerrada. En cambio, la forma diferencial enuncia una condición local que debe cumplir el campo eléctrico: la divergencia en cada punto es proporcional al valor de la densidad de carga en él.
- Tal vez lo del nombre de “forma diferencial” se entienda mejor si escribimos la divergencia en términos de las derivadas parciales de las componentes del campo eléctrico; de esta manera, la ley de Gauss en su forma diferencial se escribe así:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Es decir, la ley de Gauss en forma diferencial es una *ecuación diferencial en derivadas parciales*.

- c) En mecánica de fluidos se identifica como **fluidos incompresibles** a aquellos cuya densidad de masa es constante (por ejemplo, el agua). Si delimitamos una región del espacio dentro de una corriente de agua (por ejemplo, podemos imaginarnos la región delimitada por un cubo no material) la propiedad de incompresibilidad equivale a decir que lo que entra por las paredes debe ser compensado con lo que sale; es decir, se debe cumplir que el flujo a través de cualquier superficie cerrada debe ser 0. Por lo tanto, se debe cumplir que la divergencia de su campo de velocidades sea 0.

Si $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$ representa un campo de velocidades de un fluido, la condición de incompresibilidad implica que se debe cumplir

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Esto equivale a decir que un campo de velocidades de un fluido incompresible debe satisfacer la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0.$$

7. Coordenadas cilíndricas y esféricas. Diferenciales de área y de volumen

En algún momento de este Tema 1 (puntos 4 y 5, específicamente) hemos utilizado que el área de la superficie \mathcal{S} , $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, se corresponde con la integral $\iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S}$, o sea,

$A(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S}$ y que el volumen de una región \mathcal{R} , $v(\mathcal{R})$, se corresponde con la integral $\iiint_{\mathcal{R}} dV$, es decir, $v(\mathcal{R}) = \iiint_{\mathcal{R}} dV$. De hecho, esa área es numéricamente igual al flujo a través de la superficie de un campo que coincida con el vector normal unitario \vec{N} en todo punto de la superficie: $\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{N} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} |\vec{N}| \cos(\theta) d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S}$; mientras que el volumen es numéricamente igual al flujo de un campo con divergencia constante 1 en \mathcal{R} (usando el teorema de la divergencia). Cuando se conoce de antemano el área o el volumen, estas integrales son sustituidas simplemente por el valor correspondiente, sin necesidad de realizar algún proceso de integración. En este punto consideraremos las formas explícitas que adquieren el diferencial de superficie $d\mathcal{S}$ y el de volumen dV , dependiendo del tipo de coordenadas con los que se expresa el ambiente geométrico de referencia. En particular describiremos en detalle las coordenadas cilíndricas y las esféricas, de las que ya habíamos adelantado algo en la Unidad 1. Utilizaremos los diferenciales con estas coordenadas para expresar y calcular áreas y volúmenes de algunas figuras geométricas conocidas. El primer inciso lo dedicamos a revisar ciertas consideraciones en relación con el cálculo de áreas usando las coordenadas cartesianas y que marcan la pauta para la construcción de los diferenciales en otras coordenadas.

a) Áreas de regiones planas en coordenadas cartesianas. Si tomamos una región \mathcal{S} en el plano cartesiano xy , el diferencial de área es $d\mathcal{S} = dx dy$, o $d\mathcal{S} = dy dx$, y el área de \mathcal{S} es $A(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dx dy$ o $A(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dy dx$; pero para calcular el área debemos efectuar el proceso de sumar los diferenciales, o de integrarlos. El proceso de integrar estos diferenciales conlleva al cálculo de dos integrales iteradas (ya hemos utilizado este proceso en ocasiones anteriores) en el que se integra primero respecto a una variable, manteniendo a la otra constante, y el resultado se vuelve a integrar respecto a la variable que había quedado fija en la primera integral. La descripción de los puntos de la superficie en términos de los valores de sus coordenadas (en este caso, cartesianas) permite establecer los límites de estas integrales y volver así operativo el cálculo de áreas. En resumen: el área de una región del plano puede plantearse (y muchas veces calcularse) como una integral doble cuyos límites están determinados por las fronteras (o bordes) de la región en cuestión. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Sea \mathcal{S} un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados cuyos puntos tienen coordenadas que satisfacen simultáneamente las desigualdades $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$.

El área de \mathcal{S} puede expresarse con la integral doble: $A(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} dy dx$.

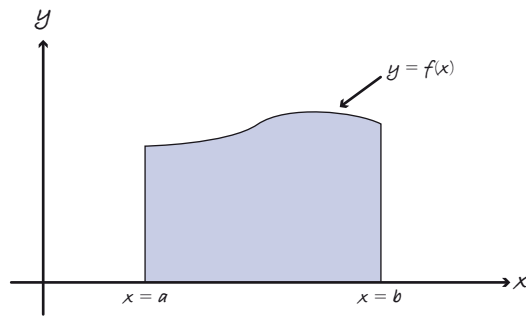
Desarrollando esta integral doble tenemos

$$A(\mathcal{S}) = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} dy \right) dx = \int_{x=a}^{x=b} (d - c) dx = [(d - c)x]_{x=a}^{x=b} = (d - c)(b - a)$$

(lado por lado).

Puedes comprobar que el resultado es el mismo si calculas la integral doble con el orden de integración cambiado: $A(\mathcal{S}) = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} dx dy$.

Ejemplo 2. Sea \mathcal{S} la región del plano delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), el eje x , y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Observa el dibujo siguiente.



Ya sabemos que el área involucra una integral doble, el problema es establecer los límites correspondientes para las dos integrales. Conviene revisar una propiedad que tienen los puntos del rectángulo del ejemplo anterior que no tienen los puntos de la región dada en este. Esta diferencia se refleja precisamente en los límites que deben colocarse en las integrales respectivas. Veamos. Si tomamos un punto (x, y) del interior del rectángulo y el segmento de recta vertical que contiene a ese punto, limitado por la tapa superior e inferior del rectángulo, la coordenada y de todos los puntos del segmento cumple la desigualdad $c \leq y \leq d$ sin importar cuál sea la coordenada x del punto que tomamos. Es decir, si tomamos cualquier segmento de recta vertical del rectángulo, los valores de y siempre van desde el valor c hasta el valor d . Esto no sucede con la región de este ejemplo; para un punto (x, y) de esta región, el segmento vertical correspondiente empieza en un punto con coordenada $y = 0$ (correspondiente al eje x), pero termina en uno con coordenada $y = f(x)$, es decir, el límite superior para la variable y depende de x .

Una manera de caracterizar los puntos que pertenecen a esta región, ligada a lo que acabamos de comentar y que permite establecer los límites adecuados para el cálculo del área, es la siguiente: los puntos de la región están encerrados por dos “curvas”, una por abajo con ecuación $y = 0$, y otra por arriba con ecuación $y = f(x)$. Como la y marca qué tan arriba o abajo está un punto, $y = 0$ y $y = f(x)$ son los límites inferior y superior, respectivamente, para la coordenada y de los puntos en esta región. Ahora bien, estos puntos están encerrados por esas dos curvas, pero la región no contiene a todos los puntos del plano encerrados; las rectas $x = a$, que pone el límite por la izquierda, y $x = b$, que lo hace por la derecha, terminan por delimitar completamente la región \mathcal{S} . Podemos decir que cualquier punto de la región debe cumplir, *primero*, la desigualdad $0 \leq y \leq f(x)$, y *después*, la desigualdad $a \leq x \leq b$. Esto establece los límites de las integrales y el orden en que deben hacerse para efecto de calcular el

área de la región. Es decir, $A(\mathcal{S}) = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=0}^{y=f(x)} dy dx$.

Una consecuencia muy interesante se deriva de la fórmula anterior si realizamos la primera integral:

$$A(\mathcal{S}) = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=0}^{y=f(x)} dy dx = \int_{x=a}^{x=b} [y]_{y=0}^{y=f(x)} dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx, \text{ es decir,}$$

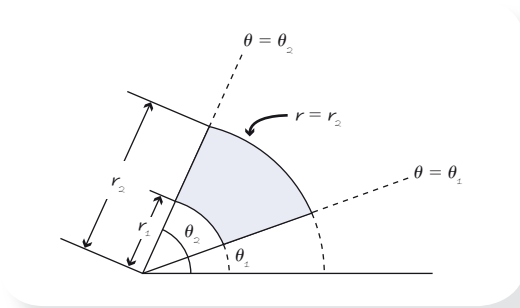
$$A(\mathcal{S}) = \int_a^b f(x) dx.$$

(Vieja fórmula conocida para calcular el área.)

Podemos decir que la fórmula para el área que hemos desarrollado, $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S}$, generaliza la fórmula que teníamos del Cálculo de una variable. En los siguientes ejemplos se verá en mayor detalle que, en efecto, podemos calcular áreas de superficies para las cuales aquel recurso se revela insuficiente.

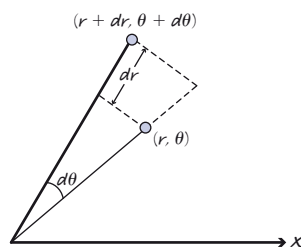
b) *Cálculo de áreas con coordenadas polares.* Un elemento importante a considerar en cuanto al tipo de coordenadas que deben utilizarse en un problema relacionado con integrales dobles es el de la facilidad para describir la superficie involucrada con ese tipo de coordenadas. En este sentido, las coordenadas cartesianas resultan ideales cuando la superficie es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, como en el ejemplo 1 del inciso a); el rectángulo descrito por las desigualdades $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ puede verse como la región del plano limitada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y por las horizontales $y = c$ y $y = d$ (por cierto, estas rectas son las líneas con ecuación más simple en el sistema del plano cartesiano). Estos valores límites para las x y las y son precisamente los límites para la integral doble. De hecho, el diferencial de área en estas coordenadas es el área de un rectángulo infinitesimal con lados paralelos a los ejes coordenados.

Con las coordenadas polares los dos tipos de líneas base con ecuaciones más simples son las circunferencias con centro en el origen, cuya ecuación general es $r = r_0$ y las rectas que pasan por el origen con ecuación general $\theta = \theta_0$. Es natural esperar que regiones del espacio limitadas por este tipo de curvas sean las más fáciles de describir en términos de las coordenadas polares. Por ejemplo, el sector anular que se muestra enseguida:



Este sector se describe como los puntos del plano cuyas coordenadas (en polares) satisfacen simultáneamente las dos desigualdades: $r_1 \leq r \leq r_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

El diferencial de área en coordenadas polares es el área de un sector anular infinitesimal como el que se muestra en la siguiente figura.



En la figura se observa el sector infinitesimal limitado por los círculos de radios r y $r + dr$, respectivamente, y las rectas correspondientes a los ángulos θ y $\theta + d\theta$, respectivamente. Los arcos de círculo entre las dos rectas han sido dibujados rectos para enfatizar la idea de considerar como recta cualquier porción infinitesimal de una curva.

El área de este sector anular puede calcularse, por ejemplo, considerando el área del sector del círculo mayor (de radio $r + dr$) y restándole el área del sector circular menor (de radio r). Si en general, el sector de ángulo α de un círculo de radio \mathcal{R} tiene área igual a $\frac{1}{2}\mathcal{R}^2\alpha$, entonces el del sector anular infinitesimal es $d\mathcal{S} = \frac{1}{2}(r + dr)^2 d\theta - \frac{1}{2}r^2 d\theta$; desarrollando el binomio al cuadrado, simplificando y eliminando el diferencial de orden tres (lo cual puede hacerse por estar sumándose con uno de orden dos) se tiene que:

$$\text{El diferencial de superficie en coordenadas polares es } d\mathcal{S} = r dr d\theta.$$

Puede observarse que este diferencial puede obtenerse también, considerando a la región infinitesimal como un “rectángulo”, multiplicando la base por la altura; donde la base puede tomarse como $r d\theta$ o $(r + dr)d\theta$, y la altura, dr . Cuando se toma la segunda alternativa para la base y se multiplica por la altura, debe eliminarse también el diferencial de orden tres que aparece.

¿Cómo expresar el área de un círculo de radio \mathcal{R} utilizando una integral doble en coordenadas polares? Veamos.

Si instalamos el sistema de coordenadas polares con el origen en el centro del círculo, se tiene que las coordenadas de los puntos del círculo satisfacen las desigualdades $0 < r \leq \mathcal{R}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (de hecho, la segunda desigualdad la cumplen todos los puntos del espacio, pero la escribimos para enfatizar cuáles deben ser los límites); entonces el área es expresada así:

$$A(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\mathcal{R}} r dr d\theta; \text{ es decir:}$$

$$1) A(\mathcal{S}) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\mathcal{R}} r dr d\theta,$$

o bien,

$$2) A(\mathcal{S}) = \int_{r=0}^{r=\mathcal{R}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r d\theta dr.$$

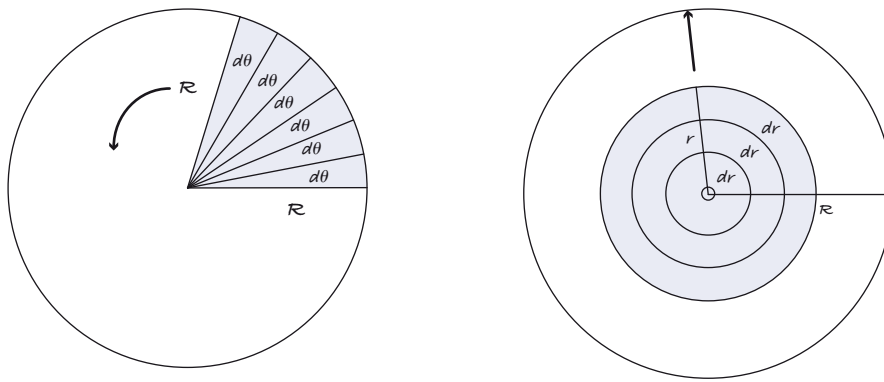
Desarrolla ambas integrales para que compruebes que en cualquier caso se obtiene el área del círculo $\pi\mathcal{R}^2$.

Un detalle que queremos hacer notar es que si realizamos la primera integral en 1) se

tiene $A(\mathcal{S}) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2}\mathcal{R}^2 d\theta$, y si realizamos la primera integral en 2), se tiene

$$A(\mathcal{S}) = \int_{r=0}^{r=\mathcal{R}} 2\pi r dr.$$

Lo que aparece dentro de estas integrales $\frac{1}{2}\mathcal{R}^2 d\theta$ y $2\pi r dr$ son también diferenciales de área en coordenadas polares, la diferencia entre estos y el diferencial $r dr d\theta$ es la dimensión, aquellos son de dimensión 1, en cuanto que al sumarlos respecto a los valores de una variable se obtiene el área del círculo; mientras, el último es de dimensión 2: hay que barrer el círculo con valores de las dos variables r y θ , para obtener el área. La expresión $\frac{1}{2}\mathcal{R}^2 d\theta$ es el área de un sector angular del círculo correspondiente al ángulo $d\theta$, y $2\pi r dr$ es el área de un anillo circular de ancho dr ; que la suma de estos diferenciales resulte ser el área del círculo se corresponde con ver al círculo formándose por una acumulación de estos sectores angulares de ángulos infinitesimales al variar el ángulo o con ver al círculo formándose por una acumulación de franjas circulares de ancho infinitesimal al variar el radio. Observa las siguientes figuras.



Diferentes formas de "barrer" el área de un círculo de radio R . En el primer dibujo las regiones angulares tienen área $\frac{1}{2} R^2 d\theta$; en el segundo, el área de la sección anular de radio r es $2\pi r dr$.

Estas maneras de ver descomponerse o formarse el círculo son muy convenientes cuando se quiere capturar la acumulación total de alguna magnitud en el círculo. Por ejemplo, si una densidad de carga eléctrica σ en una placa circular depende solo del radio ($\sigma(r)$) o solo del ángulo ($\sigma(\theta)$), o del radio y del ángulo ($\sigma(r, \theta)$), entonces los diferenciales de carga eléctrica ($d\mathcal{Q}$) son, respectivamente: $d\mathcal{Q} = 2\pi r \sigma(r) dr$, $d\mathcal{Q} = \frac{1}{2} R^2 \sigma(\theta) d\theta$ y $d\mathcal{Q} = r \sigma(r, \theta) dr d\theta$. La carga eléctrica total (\mathcal{Q}) en la placa puede calcularse, respectivamente, así:

$$\mathcal{Q} = \int_{r=0}^{r=R} 2\pi r \sigma(r) dr, \quad \mathcal{Q} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} R^2 \sigma(\theta) d\theta$$

$$\text{y } \mathcal{Q} = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r \sigma(r, \theta) dr d\theta.$$

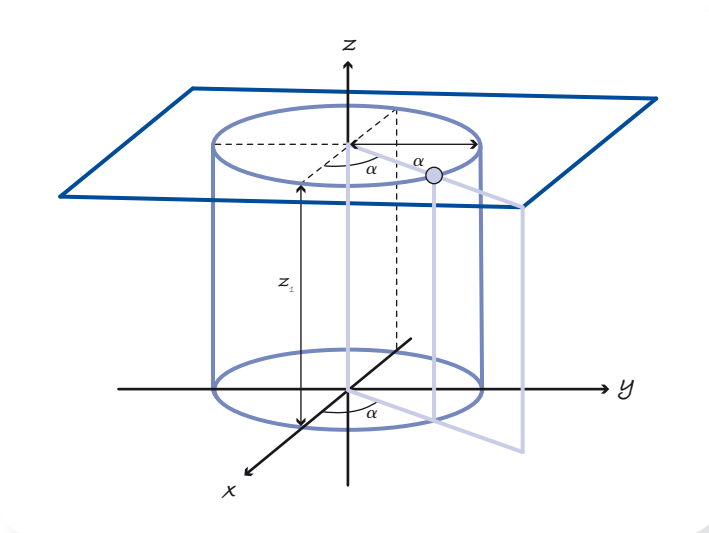
En la Tarea 9 proponemos algunos ejercicios donde estos tipos de integrales son utilizados para calcular una masa o la carga eléctrica total de una placa circular.

c) *Las coordenadas cilíndricas.* Una manera conveniente de introducir las coordenadas cilíndricas es mediante la siguiente forma de visualizar el sistema cartesiano tridimensional. La ubicación de un punto en el espacio en el sistema cartesiano puede detallarse así: primero, su coordenada z (la cual dice en qué plano horizontal se ubica el punto, su altura); ya con el plano horizontal fijo, las otras dos coordenadas, x y y , ubican al punto sobre ese plano. Puede decirse que el espacio tridimensional cartesiano es el sistema de coordenadas cartesiano xy "copiado" a cada altura z .

El sistema de coordenadas cilíndricas ubica las posiciones de los puntos del espacio con los valores de tres variables: la misma coordenada z de las cartesianas, que indica el plano horizontal en el que se ubica un punto. Dada esta coordenada, las otras dos que permiten precisar la ubicación del punto en el plano horizontal son las coordenadas polares r y θ . Es decir, el sistema de coordenadas cilíndricas del espacio es el sistema de coordenadas polares "copiado" a cada altura z .

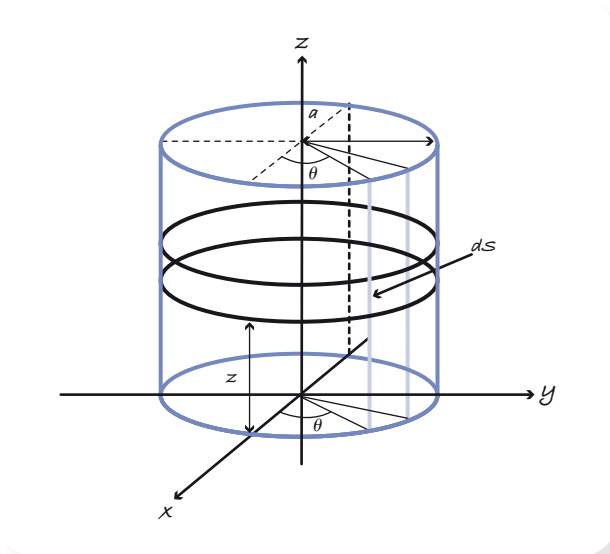
En este sistema de coordenadas, las ecuaciones $r = a$, $\theta = \alpha$ y $z = z_{\perp}$ (las más simples en este sistema) corresponden, respectivamente, a un cilindro de radio a (el círculo de radio a del plano en coordenadas polares, "copiado" a cada altura), al semiplano perpendicular al plano xy que forma un ángulo α con el plano xz y cuyo borde es el eje z ; y finalmente al plano horizontal a la altura z_{\perp} del eje z .

• **Diferencial de área en el cilindro**



Consideremos el cilindro con ecuación $r = a$. Los puntos de este cilindro con la misma coordenada z forman circunferencias horizontales (que pueden verse también como la intersección de planos horizontales con el cilindro). En el mismo cilindro, todos los puntos con coordenadas $\theta = \alpha$ forman una recta vertical (que es también la intersección del cilindro con el semiplano correspondiente a ese valor de θ). Las circunferencias y las líneas verticales forman un sistema de coordenadas sobre el cilindro. Un “rectángulo” sobre esa superficie es una región entre dos de esas circunferencias y dos de esas líneas verticales. El diferencial de área (o de superficie) en este cilindro es el área de la región (genérica) infinitesimal comprendida entre las circunferencias correspondientes a z y $z + dz$ y las rectas determinadas por θ y $\theta + d\theta$. Ahora bien, ya que los lados rectos de esta región infinitesimal tienen longitud dz y los lados curvos (abajo y arriba) miden $a d\theta$ (el radio por el ángulo), entonces el diferencial de superficie es $dS = a d\theta dz$.

Observemos que el área superficial de un cilindro (la parte lateral) de radio a y altu-



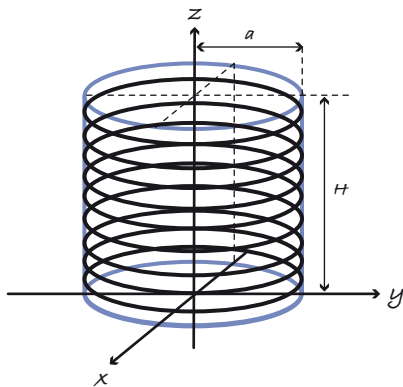
ra H puede calcularse con la integral:

$$A(S) = \int_{z=0}^{z=H} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} a d\theta dz \quad \text{o} \quad A(S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=H} a dz d\theta.$$

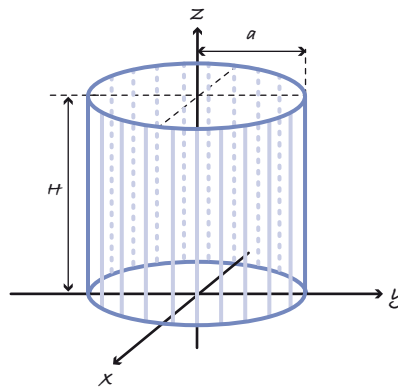
En cualquier caso, el resultado es, claramente, $A = 2\pi aH$ (perímetro de la base por la altura).

Es conveniente notar que si se desarrollan las primeras integrales se tiene, respectivamente:

$A(S) = \int_{z=0}^{z=H} 2\pi a dz$ y $A(S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} aH d\theta$. Los diferenciales de primer orden que aparecen en estas nos llevan a concebir la superficie del cilindro formada por pequeños cilindros de altura dz y radio a , o bien, por tiras verticales de ancho $a d\theta$ y de altura H . Observa el siguiente dibujo.



Área de un cilindro de radio a y altura H vista como la suma de las áreas infinitesimales $2\pi a dz$ de anillos de radio a y grosor infinitesimal dz .



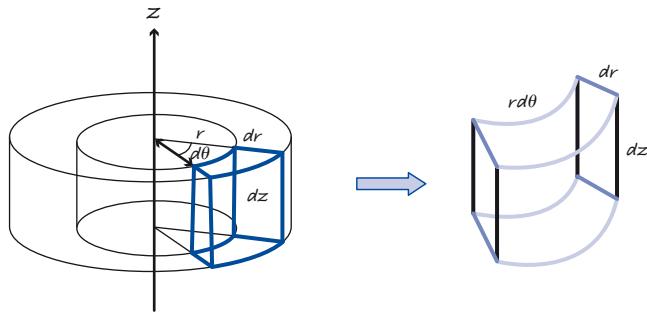
El área de un cilindro de radio a y altura H vista como la suma de las áreas infinitesimales $aH d\theta$ de tiras verticales de altura H y base infinitesimal $a d\theta$.

• Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas

Si el diferencial de área $dS = r d\theta dz$ (en la superficie de un cilindro de radio r) se multiplica por dr (el diferencial del radio) obtenemos el diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas:

$$dV = r dr d\theta dz.$$

Este diferencial corresponde al volumen de la región infinitesimal que indicamos enseguida.



Por supuesto que integrando este diferencial para el rango de valores establecido para las coordenadas r , θ y z , se obtiene el volumen de la figura correspondiente. En particular, si tenemos un cilindro relleno de radio \mathcal{R} y de altura \mathcal{H} , se tiene que su volumen puede obtenerse así:

$$V = \int_0^{\mathcal{H}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} r dr d\theta dz.$$

Integrando (te invitamos a comprobarlo) se obtiene que $V = \pi \mathcal{R}^2 \mathcal{H}$, precisamente el volumen de ese cilindro.

Te pedimos que vayas a la Tarea 9 y resuelvas los ejercicios en los que se te indica identificar la región del espacio correspondiente a los valores de las variables establecidos y calcules el área o volumen en cuestión.

Más allá del cálculo de áreas y volúmenes, que siendo de figuras conocidas podría resultar innecesario acudir a una integral, hay situaciones en las que el cálculo de una integral en este tipo de coordenadas puede resultar indispensable. Supongamos, por ejemplo, que la superficie lateral de un cilindro de radio 3 y altura 5 tiene una densidad superficial σ de carga eléctrica (o de masa) que depende de θ y z . Es decir, $\sigma = \sigma(\theta, z)$, entonces la carga eléctrica total \mathcal{Q} (o masa total \mathcal{M}) puede calcularse a través de la integral:

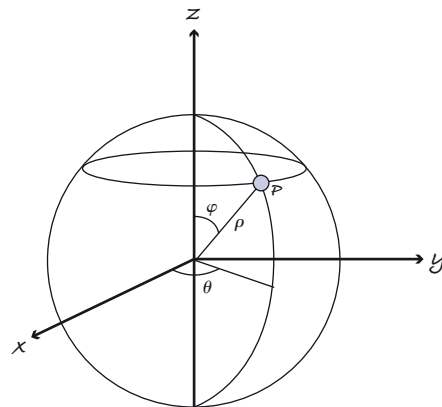
$$\mathcal{Q} = \int_{z=0}^5 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sigma(\theta, z) d\theta dz.$$

Supongamos que tenemos un cilindro de espesor 1, con radio interior 2 y exterior 3, de altura 5; suponiendo además que su densidad volumétrica de masa (o de carga eléctrica) es $\rho(r, \theta, z)$, es decir, depende de las tres variables, la masa (carga eléctrica) total se obtiene resolviendo:

$$\mathcal{M} = \int_{z=0}^5 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=2}^3 \rho(r, \theta, z) r dr d\theta dz.$$

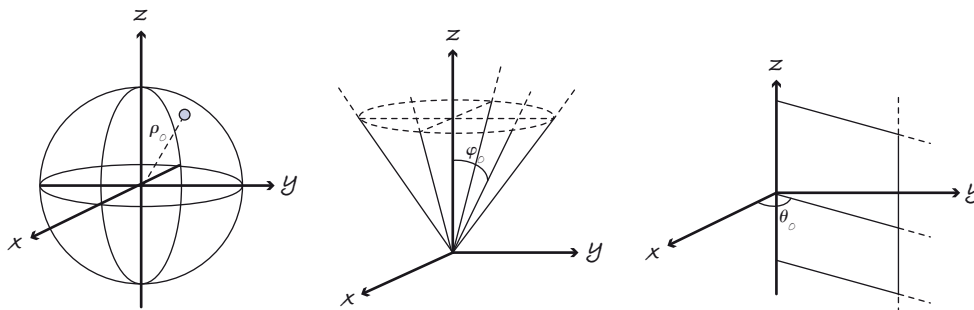
d) *Las coordenadas esféricas.* La posición de un punto descrito en estas coordenadas está dado por: 1) su distancia al origen, que se indica con la letra ρ que ya habíamos introducido en la Unidad 1 (aunque podría causar confusión utilizar la misma letra

que para la densidad volumétrica en el inciso anterior, decidimos mantener la letra ρ porque es la notación más usada en la bibliografía matemática clásica en relación con las coordenadas esféricas), 2) el ángulo θ como se describe en las coordenadas cilíndricas, y 3) el ángulo φ que se forma empezando del eje z y avanzando hacia el segmento de recta que conecta el punto con el origen. El conjunto de valores de ρ , φ y θ para cada punto forman el llamado sistema de **coordenadas esféricas**. El siguiente dibujo muestra las tres coordenadas asociadas a un punto \mathcal{P} .



Coordenadas esféricas ρ , θ y φ de un punto \mathcal{P} .

Las superficies más sencillas de describir con este tipo de coordenadas son las que satisfacen las ecuaciones que se forman igualando cada coordenada a una constante; veamos. Todos los puntos del espacio que satisfacen la ecuación $\rho = \rho_0$ (con $\rho_0 \geq 0$) pertenecen a la esfera de radio ρ_0 . Los que satisfacen la ecuación $\varphi = \varphi_0$ (constante) forman un cono. Los que satisfacen $\theta = \theta_0$ (constante) forman un semiplano. Esfera, cono y semiplano se muestran a continuación.

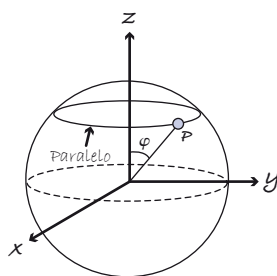


Superficies de las ecuaciones básicas: $\rho = \rho_0$ (esfera), $\varphi = \varphi_0$ (cono) y $\theta = \theta_0$ (semiplano).

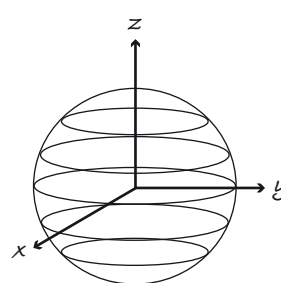
Las intersecciones de esferas con conos forman los paralelos, y las de esferas con semiplanos forman los meridianos; las intersecciones de semiplanos con conos son semirrectas (o rayos) que parten del origen.

• Diferencial de área en la esfera

Pensemos en una esfera de radio a centrada en el origen. Instalaremos en ella el sistema de coordenadas formado por los paralelos y los meridianos construidos como se describe a continuación. Tomamos la semirrecta que empieza en el origen y forma un ángulo φ con el eje z (medido a partir de este); esta semirrecta interseca a la esfera en un punto \mathcal{P} . Si giramos la semirrecta alrededor del eje z , quedando fijo el extremo en el origen y manteniendo el ángulo φ constante, el punto \mathcal{P} , al girar junto con la recta forma una circunferencia sobre la esfera, esta circunferencia es el paralelo correspondiente al ángulo φ . Si tomamos todos los paralelos correspondientes a los ángulos φ desde 0 (que corresponde al Polo Norte), pasando por $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (cuyo paralelo corresponde al Ecuador) hasta $\varphi = \pi$ (que corresponde al Polo Sur), cada punto de la esfera pertenece a uno (y solamente uno) de estos paralelos; de hecho, puede decirse que la esfera está formada por la colección de todos sus paralelos. Observa las siguientes figuras.

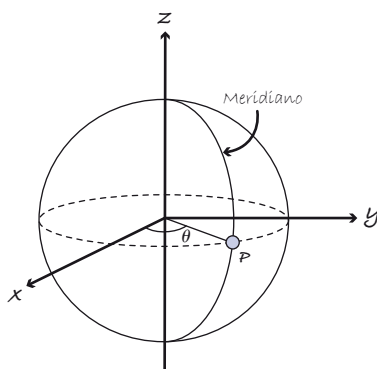


Paralelo correspondiente al ángulo φ .

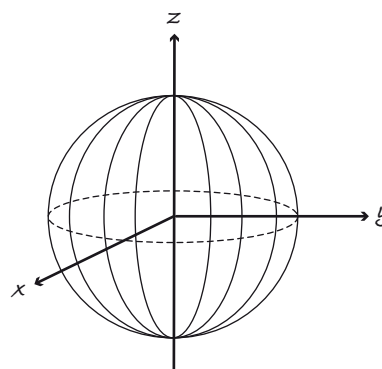


La esfera formada por paralelos.

Si nos fijamos en el Ecuador de la esfera, el cual es la circunferencia de radio a en el plano xy , y tomamos un punto \mathcal{P} de él, trazamos la semicircunferencia que va sobre la esfera, desde el Polo Norte hasta el Polo Sur y que pasa por \mathcal{P} ; este es el meridiano correspondiente al punto \mathcal{P} . Para cada punto \mathcal{P} del Ecuador trazamos el segmento de recta que va del punto al origen y nos fijamos en el ángulo θ que se forma entre este segmento y el eje x positivo, partiendo de este y avanzando hacia el eje y positivo hasta el segmento. Podemos identificar cada meridiano con un ángulo θ que va desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Cada punto de la esfera pertenece a un solo meridiano (con excepción de los polos que están en todos); de hecho, la esfera puede verse formada por la colección de todos los meridianos. Observa las siguientes figuras.



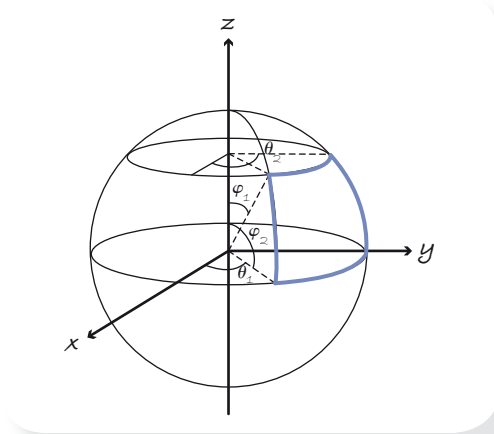
Meridiano correspondiente al ángulo θ .



La esfera formada por meridianos.

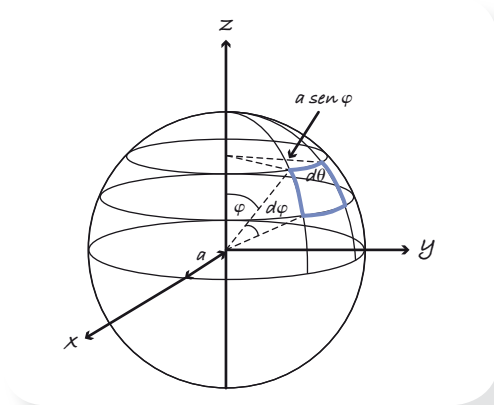
Cada punto de la esfera puede ubicarse señalando el paralelo (latitud) y el meridiano (longitud) a los que pertenece. Es decir, cada punto de la esfera es identificado por el valor del ángulo φ (de su paralelo) y el valor del ángulo θ (de su meridiano). Estos ángulos se corresponden con las llamadas **coordenadas terrestres**, sólo que aquí el paralelo 0 grados corresponde al ecuador (en nuestro caso correspondería al ángulo $\varphi = \frac{\pi}{2}$), y al avanzar hacia el polo norte se tendrían los paralelos “latitud norte”, o hacia el polo sur, donde están los paralelos “latitud sur”. En el caso de los meridianos, en la medida terrestre, se parte del meridiano de Greenwich, donde $\theta = 0$, y se avanza al este (longitud este) o al oeste (longitud oeste).

Los puntos de la esfera de radio a están determinados por los valores de φ y θ . Las regiones de la superficie más sencillas de describir en términos de las coordenadas esféricas son las delimitadas por dos paralelos y dos meridianos. Los puntos de la esfera comprendidos entre los paralelos correspondientes a los valores φ_1 y φ_2 de la variable φ y los meridianos correspondientes a los valores θ_1 y θ_2 de la variable θ se identifican con los puntos que satisfacen las desigualdades $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Una integral de superficie que tenga a esta región de la esfera como región de integración tendrá a estos valores extremos de estas variables como los límites de integración, pensando en que la integral de superficie se realiza con una integral doble con estas variables. Observa el siguiente dibujo.



Imaginemos una región infinitamente pequeña de la esfera delimitada por los paralelos φ , el infinitamente cercano $\varphi + d\varphi$ y los meridianos θ y $\theta + d\theta$; el área de esta región es un diferencial de superficie en coordenadas esféricas.

Esta pequeña región puede verse como un rectángulo plano cuyas dimensiones corresponden a sectores de circunferencias como se indica en la siguiente figura.



Así, el diferencial de superficie correspondiente a esa región infinitesimal de la esfera de radio a es

$$dS = a^2 \operatorname{sen} \varphi d\theta d\varphi.$$

Por supuesto que el área de la esfera puede obtenerse con la integral doble

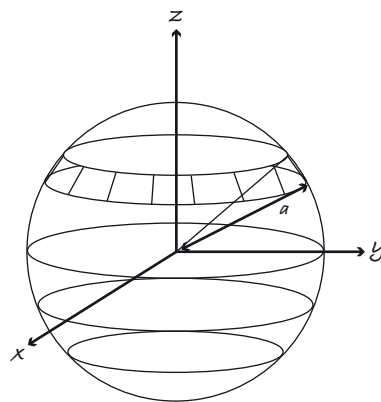
$$A(S) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} a^2 \operatorname{sen} \varphi d\theta d\varphi, \text{ o bien, } A(S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} a^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta.$$

Te invitamos a que compruebes que en cualquier caso el resultado es $4\pi a^2$.

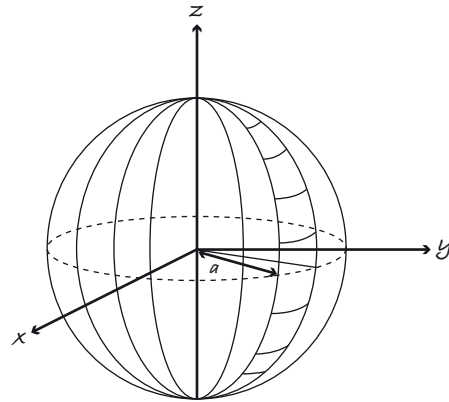
Ahora bien, si se realizan las primeras integrales en estas integrales dobles se tiene respectivamente:

$$A(S) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} 2\pi a^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi \text{ y } A(S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2a^2 d\theta.$$

Los diferenciales que aparecen en estas integrales son también diferenciales de superficie, pero de orden uno, a diferencia del primero que construimos, que es de orden dos. Estos diferenciales corresponden al área de una banda circular horizontal y al área de un gajo vertical de la esfera, respectivamente, que se corresponden a maneras de ver formándose la superficie esférica.



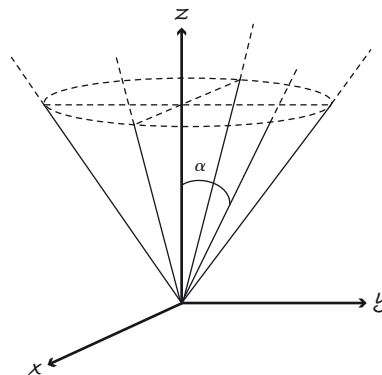
Sector entre los paralelos φ y $d\varphi$
con área $2\pi a^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi$.



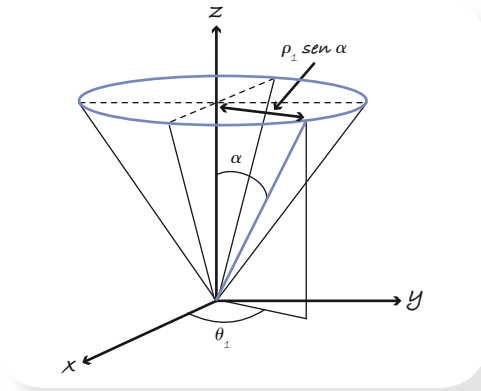
Sector entre los meridianos θ y $d\theta$
con área $2a^2 d\theta$.

• Diferencial de área en el cono

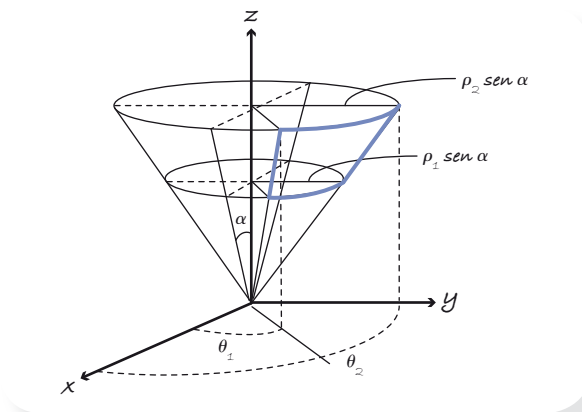
Si fijamos un valor de φ , digamos $\varphi = \alpha$, los puntos que cumplen esta condición forman el cono que se muestra a continuación.



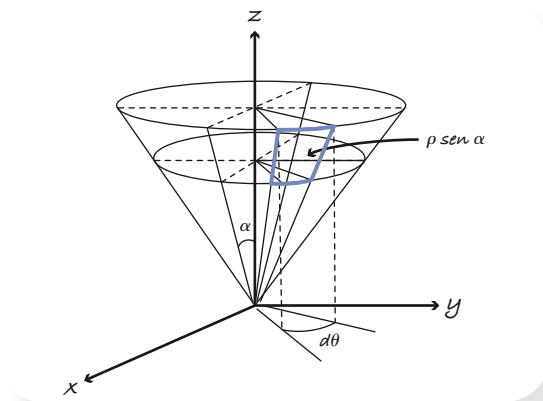
Si sobre esta superficie tomamos los puntos con un valor fijo de ρ , digamos ρ_1 , con ellos se forma una circunferencia horizontal (un paralelo) de radio $\rho_1 \operatorname{sen} \alpha$. Si, en cambio, tomamos los puntos sobre el cono con el valor de θ fijo, digamos $\theta = \theta_1$, se forma una línea que parte del origen.



Los “rectángulos” típicos sobre el cono son las regiones encerradas por un par de estos círculos y un par de las líneas rectas mencionadas. En términos de desigualdades, estas regiones satisfacen dos desigualdades del estilo $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.



Si tomamos dos de estos círculos infinitamente próximos correspondientes a φ y $\varphi + d\varphi$ y las dos rectas correspondientes a θ y $\theta + d\theta$, formamos una región infinitamente pequeña cuya área es $dS = \rho \operatorname{sen} \alpha d\theta d\rho$; este es un diferencial de orden dos en coordenadas esféricas sobre el cono.



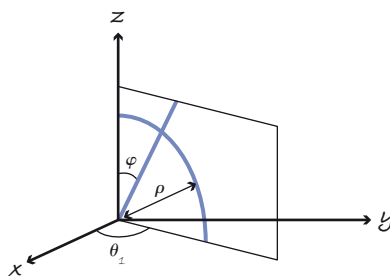
Entonces el área de un cono con $\varphi = \alpha$ y $\rho = L$ puede obtenerse desarrollando cualquiera de las dos integrales siguientes:

$$A(S) = \int_{\rho=0}^{\rho=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho \operatorname{sen} \alpha d\theta d\rho \quad \text{o} \quad A(S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=L} \rho \operatorname{sen} \alpha d\rho d\theta.$$

Te invitamos a comprobar que en ambos casos se obtiene que $A(S) = \pi L^2 \operatorname{sen} \alpha$.

• **Diferencial de área en el semiplano $\theta = \theta_1$**

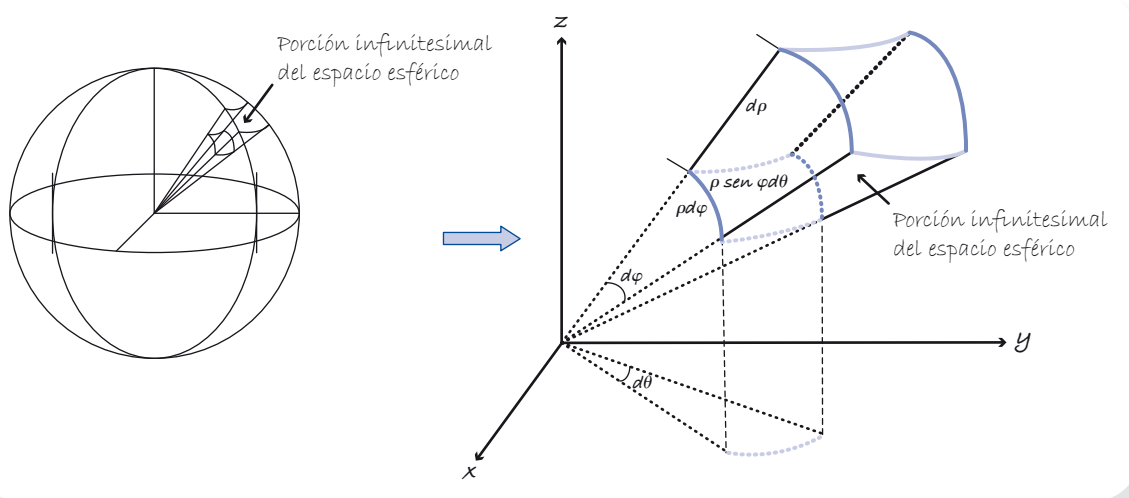
Cuando se fija el valor de la coordenada θ , digamos $\theta = \theta_1$, la superficie que se forma es el semiplano perpendicular al plano xy con extremo el eje z . Sobre este plano, los puntos que tienen un valor fijo de ρ forman una semicircunferencia; los puntos del semiplano con un valor fijo de φ forman una semirrecta que parte del origen. (La intersección del cono correspondiente y el semiplano).



ρ y φ forman un sistema de coordenadas en el semiplano que se corresponde con las coordenadas polares. El diferencial de superficie de la porción infinitesimal de semiplano limitada por las circunferencias ρ y $\rho + d\rho$ y los rayos φ y $\varphi + d\varphi$ es: $dS = \rho d\varphi d\rho$.

• **Diferencial de volumen en coordenadas esféricas**

Si al diferencial de área en una esfera de radio ρ : $dS = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta$ se le multiplica por $d\rho$, se consigue el volumen de una región infinitesimal como se indica en la siguiente figura.



Esta magnitud infinitesimal corresponde al diferencial de volumen en coordenadas esféricas; es decir,

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

El volumen de una esfera de radio \mathcal{R} puede obtenerse, como es de esperar, con la integral

$$V = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=\mathcal{R}} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

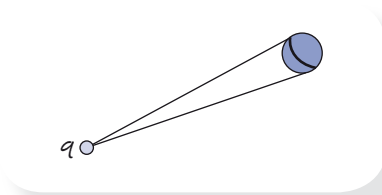
Te invitamos a que verifiques que, en efecto, de aquí se obtiene que $V = \frac{4}{3} \pi \mathcal{R}^3$.

Por supuesto que el propósito de construir estos diferenciales no es obtener este volumen, que de hecho ya se conoce. Se trata de utilizar estas integrales para modelar y calcular otro tipo de magnitudes, como son la masa y la carga eléctrica total, por ejemplo, de una esfera cuando se conoce que la densidad correspondiente cambia de acuerdo con las variables que hemos considerado en estos sistemas de coordenadas.

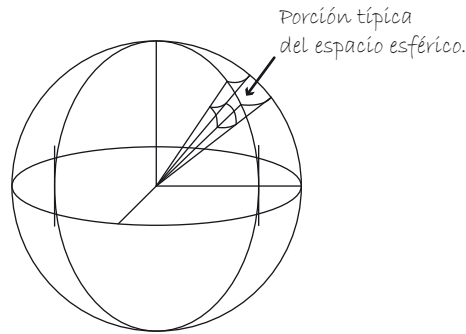
8. Divergencia del campo eléctrico de una carga puntual

Sea \vec{E} el campo eléctrico que genera una carga puntual positiva de q coulombs colocada en el origen; calcularemos la divergencia de este campo mediante un análisis infinitesimal poniendo en juego el uso de las coordenadas esféricas.

Consideremos una pequeña esfera en algún lugar del campo \vec{E} y a los rayos que parten de la carga q y son tangentes a la esfera. Los puntos de tangencia de estos rayos con la esfera la dividen en dos cascarones: el que está de frente a la carga y el que está oculto a la carga. El primero es de menor área, pero sobre él son más grandes los vectores del campo, el segundo es de mayor área, pero sobre él son más pequeños los vectores del campo. Como veremos, el área y el tamaño de los vectores del campo se compensan en uno y otro cascarón y el resultado es que el flujo neto a través de la esfera es nulo, esto es, lo que entra por el cascarón de frente a la carga es lo mismo que lo que sale por el cascarón oculto a la carga.



Si en lugar de una esfera tomamos una porción típica del espacio esférico, cuyas aristas son cuatro paralelos, cuatro meridianos y cuatro rayos que parten del punto en donde está la carga u origen, como se muestra a continuación.



Podemos llevar a cabo el siguiente análisis.

Flujos sobre las caras esféricas

Hay dos caras esféricas: una de radio menor ρ y otra de radio mayor $\rho + d\rho$; ambas están limitadas por dos segmentos de paralelos y dos segmentos de meridianos. En la cara de radio menor ρ , que también tiene menor área, los vectores del campo \vec{E} tienen magnitud mayor, a saber $k \frac{q}{\rho^2}$, y en la cara de radio mayor $\rho + d\rho$, que tiene mayor área, los vectores del campo \vec{E} tienen magnitud menor, es decir, $k \frac{q}{(\rho + d\rho)^2}$. Se compensan entonces las áreas de las caras con el tamaño de los vectores del campo sobre ellas y sus flujos son iguales, esto es, el flujo que entra por la cara de radio menor es el mismo que sale por la cara de radio mayor.

El cálculo puede hacerse en coordenadas esféricas tomando en cuenta que el campo es normal a las esferas con centro en la carga.

El área de la cara de radio menor es $(\text{arco de meridiano}) \times (\text{arco de paralelo}) = (\rho d\varphi)(\rho \text{ sen } \varphi d\theta)$, y el flujo correspondiente a través de esta cara sería

$$k \frac{q}{\rho^2} (\rho d\theta)(\rho \text{ sen } \varphi d\theta) = kq \text{ sen } \varphi d\varphi d\theta.$$

De manera similar, el flujo a través de la cara con área mayor sería

$$k \frac{q}{(\rho + d\rho)^2} [(\rho + d\rho)d\varphi][(\rho + d\rho) \text{ sen } \varphi d\theta] = kq \text{ sen } \varphi d\varphi d\theta.$$

Como se ve, ambos flujos son iguales.

Flujos sobre las otras caras

Hay también dos caras cónicas limitadas por segmentos de paralelos (en diferentes esferas) y rayos que emanan del origen en donde está la carga q , y dos caras planas limitadas por segmentos de meridianos (en diferentes esferas) y rayos que emanan del origen en donde está la carga q , pero los vectores del campo \vec{E} no atraviesan estas caras y sobre ellas no hay flujo.

En resumen, el flujo total a través de las seis caras de la porción típica del espacio esférico es cero, por lo que la divergencia del campo eléctrico que genera una carga puntual se anula en todos los puntos (excepto en el origen, como se establecerá un poco más adelante).

El hecho de que el flujo total a través de las seis caras de la porción típica del espacio esférico sea cero concuerda con la ley de Gauss para la electricidad, que afirma que el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la porción de carga que genera el campo y está en el interior de la superficie. Como en el caso que estamos considerando no hay carga interior, el flujo debe ser cero.

La divergencia no está definida en el origen, en donde conceptualmente podemos suponer que está confinada la carga q . Pero, considerando que la divergencia en un punto es la razón de flujo a volumen, tenemos la fórmula:

$$\text{Div} (0, 0, 0) = \frac{\text{flujo a través de una esfera de radio } d\rho}{\text{volumen de la esfera de radio } d\rho} = \frac{(4\pi d\rho^3) \left(k \frac{q}{d\rho^2} \right)}{(4/3)\pi d\rho^3} = \frac{3kq}{d\rho^3} = \infty.$$

En conclusión, tenemos que la divergencia de (\vec{E}) se anula en todos los puntos del espacio, excepto en el origen, en donde toma el valor infinito.

$$\text{Div} (\vec{E}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ \infty & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Es fácil verificar este resultado sobre la divergencia del campo eléctrico que produce una carga puntual q aplicando la expresión con derivadas parciales de la divergencia a la fórmula del campo (\vec{E}) :

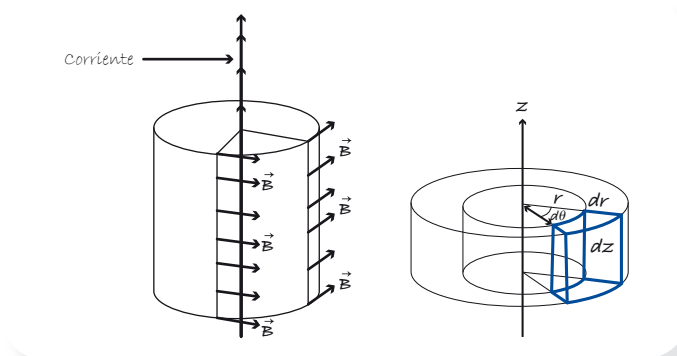
$$\vec{E}(\rho) = k \frac{q}{\rho^2} \frac{\vec{\rho}}{\rho} = k \frac{q}{\rho^3} \vec{\rho} = kq \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\vec{E} = \frac{kqx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{i} + \frac{kqy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{j} + \frac{kqz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}.$$

9. Divergencia del campo magnético de una línea de corriente

Sea \vec{B} el campo magnético que genera una línea de corriente con intensidad I amperes, calcularemos la divergencia de este campo mediante un análisis infinitesimal poniendo en juego el uso de las coordenadas cilíndricas.

Para realizar este análisis consideremos el flujo del campo \vec{B} a través de una región infinitesimal del espacio cilíndrico, es decir, la región entre los cilindros con radios r y $r + dr$, los planos que parten del eje z que corresponden a los valores θ y $\theta + d\theta$ y los planos horizontales z y $z + dz$.



Los vectores del campo de velocidades \vec{B} son tangentes a los cilindros con radios r y $r + dr$ y a los planos horizontales con valores z y $z + dz$, por lo que por estas cuatro caras no hay flujo.

Sobre las caras planas con valores θ y $\theta + d\theta$ sí hay flujo, pero el “flujo que entra” por la cara plana correspondiente al valor θ es el mismo “que sale” por la cara correspondiente al valor $\theta + d\theta$.

El “flujo que entra” por la cara plana correspondiente al valor θ es fácil de calcular porque el campo es perpendicular a la región infinitesimal en esta cara, y puede considerarse que en toda la cara la magnitud del campo es constante, de tal forma que dicho flujo puede calcularse con la fórmula:

$$\text{Flujo} = |\vec{B}| \times (\text{área de la cara}).$$

El área de la cara es $drdz$ y la magnitud del campo magnético puede tomarse como $|\vec{B}| = k\frac{I}{r}$, que es la magnitud del campo magnético en el cilindro interior, o bien, $|\vec{B}| = k\frac{I}{r+dr}$, que es la magnitud del campo en el cilindro exterior.

$$\text{Flujo} = |\vec{B}| \times (\text{área de la cara}) = k\frac{I}{r} drdz, \quad \text{o bien,}$$

$$\text{Flujo} = |\vec{B}| \times (\text{área de la cara}) = k\frac{I}{r+dr} drdz.$$

Un análisis idéntico puede llevarse a cabo en la cara plana correspondiente al valor $\theta + d\theta$, por lo que el “flujo que sale” a través de esta tiene el mismo valor que el “flujo que entra” por la cara plana correspondiente al valor θ y, en resumen, el flujo es cero.

Recordando que en cualquier punto \mathcal{P} del espacio, la divergencia es la razón de flujo a volumen; es decir, $\text{Div}(\vec{B})(\mathcal{P}) = \frac{dF}{dV}$, donde dF es el flujo a través de una superficie cerrada infinitesimal que encierra al punto \mathcal{P} , y dV es el volumen interior a dicha superficie. Tenemos que $\text{Div}(\vec{B})(\mathcal{P}) = 0$ en cualquier punto \mathcal{P} , ya que para un punto \mathcal{P} arbitrario podemos tomar una región cilíndrica infinitesimal cerrada, como la ya considerada, que lo incluya, y como ya se vio, el flujo a través de la superficie de esta región, es decir, dF , es nulo. Esto concuerda con la ley de Gauss del magnetismo que establece que el flujo de un campo magnético a través de una superficie cerrada es cero.

Es fácil verificar este resultado sobre la divergencia del campo magnético que produce una línea de corriente de intensidad I amperes, aplicando la expresión con derivadas parciales de la divergencia a la fórmula del campo \vec{B} , $\vec{B}(x, y) = kI\frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{x^2 + y^2}$.

El análisis aquí llevado a cabo no incluye a los puntos del eje z a lo largo del cual transita la corriente eléctrica; en esos puntos no está definido el campo magnético y para determinar el valor de la divergencia en esos puntos deberá realizarse un análisis más exhaustivo a fin de lidiar con las vicisitudes del infinito.

- En cada caso se considera a una compuerta en el plano xy y al campo de velocidades de un fluido que atraviesa la compuerta. Calcula el flujo del fluido a través de la compuerta, en dirección del eje z positivo; los ejes x y y están medidos en metros, y la velocidad del fluido, en m/s .
 - Compuerta: el rectángulo definido por las desigualdades $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$.
Velocidad del fluido $\vec{v} = e\vec{k}$
 - Compuerta: el rectángulo definido por las desigualdades $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$.
Velocidad del fluido $\vec{v} = 3\vec{i} + e\vec{k}$
 - Compuerta: el rectángulo definido por las desigualdades $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$.
Velocidad del fluido $\vec{v} = 3\vec{i} + e\vec{j}$
 - Compuerta: el rectángulo definido por las desigualdades $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$.
Velocidad del fluido $\vec{v} = (x + y)\vec{k}$
 - Compuerta: el rectángulo definido por las desigualdades $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$.
Velocidad del fluido $\vec{v} = (x^2 + 5y)\vec{k}$
 - Compuerta: el rectángulo definido por las desigualdades $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$.
Velocidad del fluido $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k}$
 - Compuerta: el círculo con centro en el origen y radio 3.
Velocidad del fluido $\vec{v} = 4\vec{i} + 10\vec{k}$
 - Compuerta: el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 4)$.
Velocidad del fluido $\vec{v} = 4\vec{i} + x\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$
- Considera a la superficie \mathcal{S} que es el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, esto es el hemisferio por encima del plano xy . Escoge una dirección normal a la superficie (de las dos posibles) en la que será positivo el flujo de un fluido y calcula el flujo sobre la superficie \mathcal{S} si está inmersa en un fluido que se mueve de acuerdo con la ecuación de velocidad $\vec{v}(x, y, z)$.
 - $\vec{v}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$
 - $\vec{v}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\vec{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\vec{k}$
 - $\vec{v}(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$

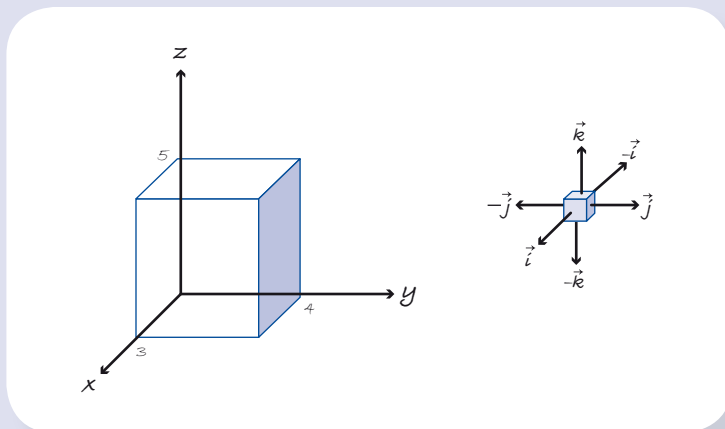
Sugerencia: En los tres incisos, el campo \vec{v} tiene magnitud constante sobre la superficie \mathcal{S} .

3. Considera a los campos vectoriales:

a) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{j} + x\sqrt{z}\vec{k}$

b) $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + xz\vec{j} + y^2\vec{k}$

Determina el flujo (de adentro hacia fuera) a través de las caras de una caja en el espacio con lados paralelos a los planos coordenados y vértices opuestos en $(0, 0, 0)$ y $(3, 4, 5)$. Llena los espacios de las tablas mostradas.



a) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{j} + x\sqrt{z}\vec{k}$

Cara/ elemento	Vector normal unitario \vec{N}	Vector infinitesimal normal $d\vec{s}$	Diferencial de flujo $dF = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	Flujo F
C_F Cara del frente $x=3$				
C_A Cara de atrás $x=0$				
C_{Iz} Cara izquierda $y=0$				
C_D Cara derecha $y=4$				
C_S Cara superior $z=5$				
C_{In} Cara inferior $z=0$				

Flujo total = _____

$$b) \vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + xz\vec{j} + y^2\vec{k}$$

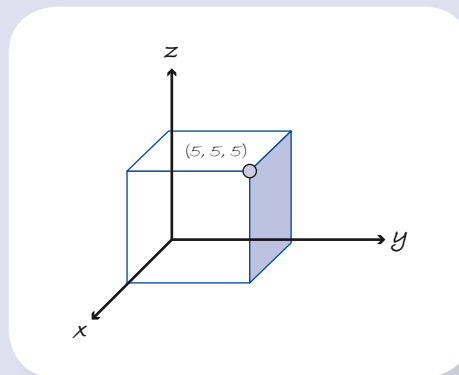
Cara/ elemento	Vector normal unitario \vec{N}	Vector infinitesimal normal $d\vec{s}$	Diferencial de flujo $dF = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	Flujo F
C_F Cara del frente $x = 3$				
C_A Cara de atrás $x = 0$				
C_{Iz} Cara izquierda $y = 0$				
C_D Cara derecha $y = 4$				
C_S Cara superior $z = 5$				
C_{In} Cara inferior $z = 0$				

Flujo total = _____

4. Un fluido se mueve en el espacio de acuerdo con la fórmula de velocidad:

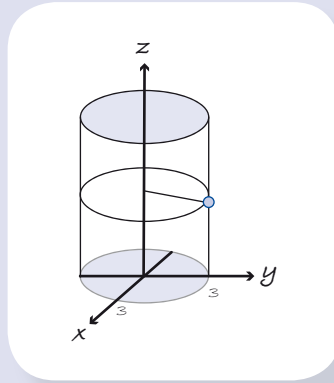
$$\vec{v}(x, y, z) = (x^2yz + 1)\vec{i} + (xy^2z + 2)\vec{j} + (xyz^2 + 3)\vec{k}.$$

Considera el cubo con vértices opuestos en $(0, 0, 0)$ y $(5, 5, 5)$ y caras paralelas a los planos coordenados.

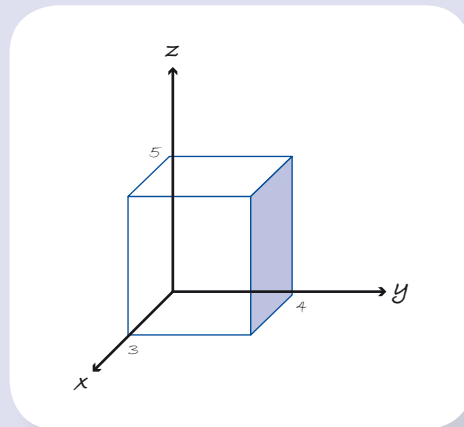


Calcula el flujo (de adentro hacia fuera) del fluido a través de la superficie de seis caras que cubre al cubo.

5. Calcula el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (xyz)\vec{k}$ a través de un cilindro cerrado (es decir, incluyendo las tapas) de radio 3 y altura 10 cuyo eje es el eje z y su base está en el plano xy . Observa que en la superficie lateral el campo es paralelo a ella.



6. Verifica el teorema de la divergencia para cada uno de los siguientes campos vectoriales en la región del espacio mostrada en la siguiente figura.

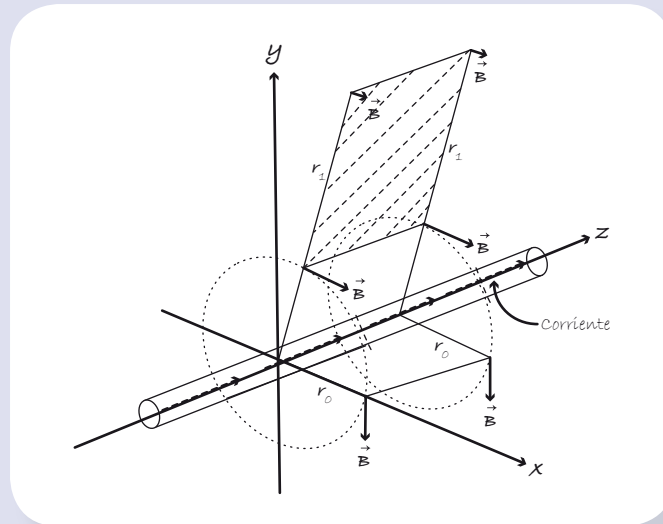


a) $\vec{F}(x, y, z) = 4x\vec{i} + 6y\vec{j} + 9z\vec{k}$

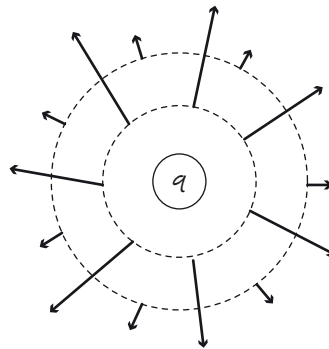
b) $\vec{F}(x, y, z) = 3x\vec{i} + 5y\vec{j} - 2z\vec{k}$

7. El campo magnético producido por una línea de corriente de intensidad I amperes está dado por la fórmula $\vec{B}(x, y, z) = kI \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{r^2} = kI \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{x^2 + y^2}$. En esta fórmula se ha considerado que el eje z está en la dirección de la línea de corriente, y el plano xy es perpendicular a ella. Calcula el flujo del campo magnético a través de la superficie plana sombreada en la figura; esta superficie es perpendicular al plano xy y es parte de un plano infinito que contiene al eje z . Si consideramos el valor de r como la distancia de cualquier punto perpendicular al eje z , tenemos que r varía de r_0 a r_1 sobre la superficie; asimismo, sobre la superficie tenemos que la variable z toma valores entre 0 y 1.

Sugerencia: Toma en cuenta que $|\vec{B}(x, y, z)| = \frac{kI}{r}$ y que el campo magnético es normal a la superficie.

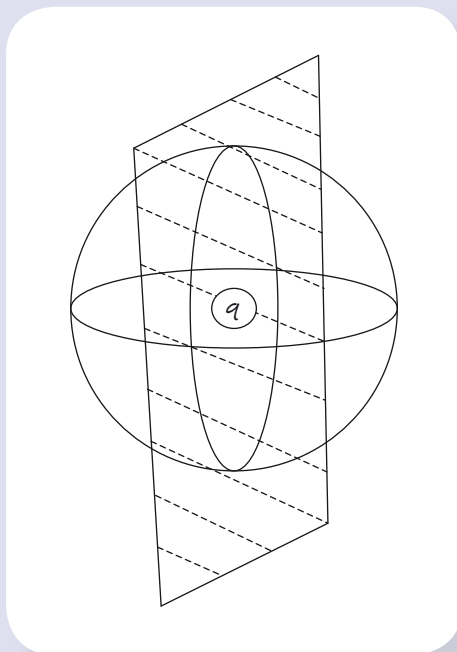


8. El campo eléctrico producido por una carga puntual de q coulombs confinada en el origen de un sistema coordenado cartesiano está dado por la fórmula $\vec{E}(x, y, z) = \frac{kq \vec{\rho}}{\rho^2} = \frac{kq}{\rho^2} \vec{\rho} = kq \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, donde $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ es el vector de posición del punto (x, y, z) del espacio, y $\rho = |\vec{\rho}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la magnitud del vector $\vec{\rho}$ o distancia del punto (x, y, z) al origen.

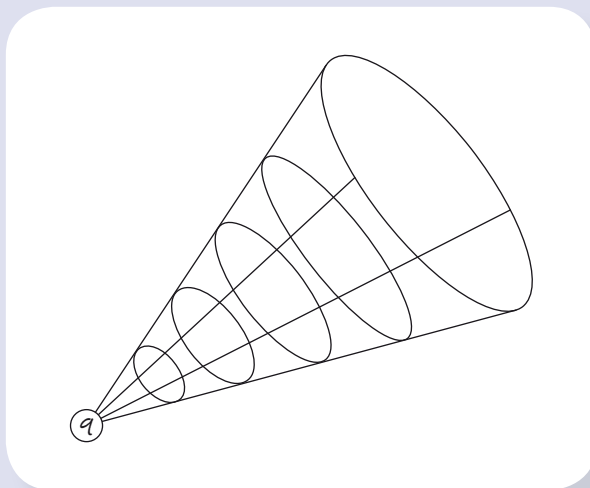


Vista bidimensional del campo eléctrico producido por la carga puntual q .

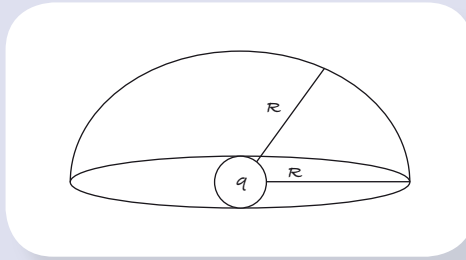
- a) ¿Cual es el flujo del campo eléctrico a través de una superficie contenida en un plano que pasa por el origen? Argumenta tu respuesta.



- b) ¿Cual es el flujo del campo eléctrico a través de la superficie lateral de un cono que tiene vértice en el origen? Argumenta tu respuesta.

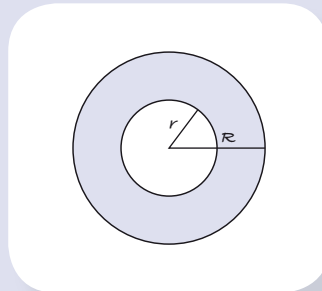


- c) ¿Cual es el flujo del campo eléctrico a través de medio hemisferio de radio R de una esfera con centro en el origen? Argumenta tu respuesta.



9. Se instala un sistema de coordenadas polares con el origen en el centro de un disco agujereado de radio R m y radio menor r m cargado eléctricamente. Calcula la carga eléctrica del disco si su densidad superficial de carga está dada por la fórmula:

- a) $\sigma(r) = r$ coulombs/cm²
 b) $\sigma(\theta) = \theta$ coulombs/cm²
 c) $\sigma(r, \theta) = r\theta$ coulombs/cm²



10. De acuerdo con la consideración 7 Coordenadas cilíndricas y esféricas. Diferenciales de área y de volumen, el diferencial de área dS del cono $\varphi = \alpha$, es decir, el cono formado por un rayo que gira alrededor del eje z manteniendo siempre un ángulo α respecto a ese eje, está dado por la fórmula $dS = \rho \operatorname{sen} \alpha d\theta d\rho$, y el área de ese cono cuando el rayo o semirrecta que lo genera tiene longitud L está dado por la doble integral

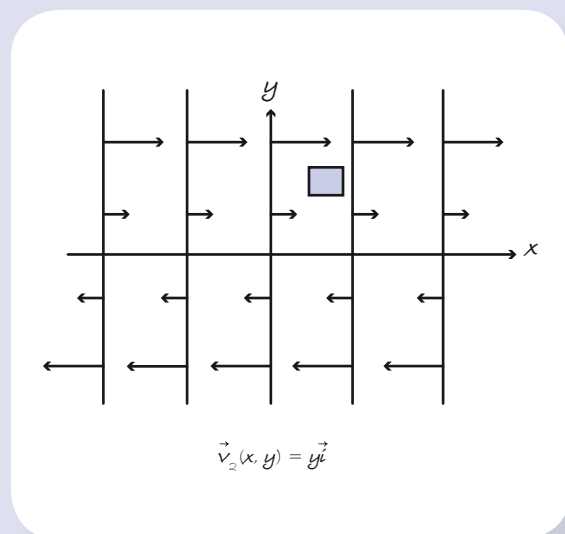
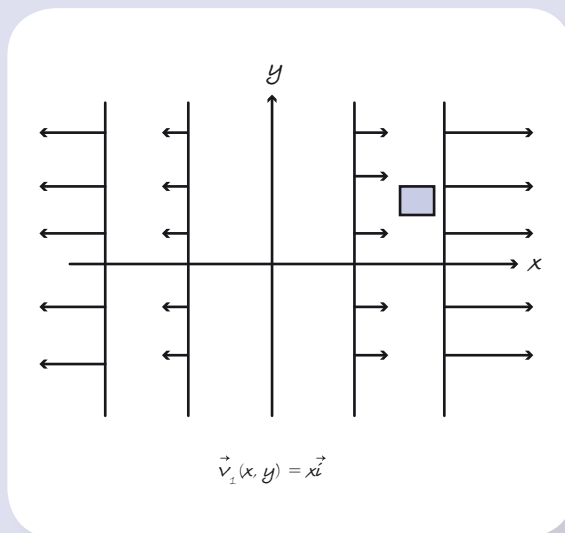
$$A = \int_{\rho=0}^{\rho=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho \operatorname{sen} \alpha d\theta d\rho. \text{ Calcula}$$

- a) El área del cono obteniendo el valor de la integral doble $\int_{\rho=0}^{\rho=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho \operatorname{sen} \alpha d\theta d\rho$ con el orden de diferenciales indicado.
- b) El área del cono obteniendo el valor de la integral doble $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=L} \rho \operatorname{sen} \alpha d\rho d\theta$ con el orden de diferenciales indicado.
- c) La integral $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho \operatorname{sen} \alpha d\theta d\rho$, y explica qué porción del cono tiene este diferencial de área.
- d) La integral $\int_{\rho=0}^{\rho=L} \rho \operatorname{sen} \alpha d\rho d\theta$, y explica qué porción del cono tiene este diferencial de área.

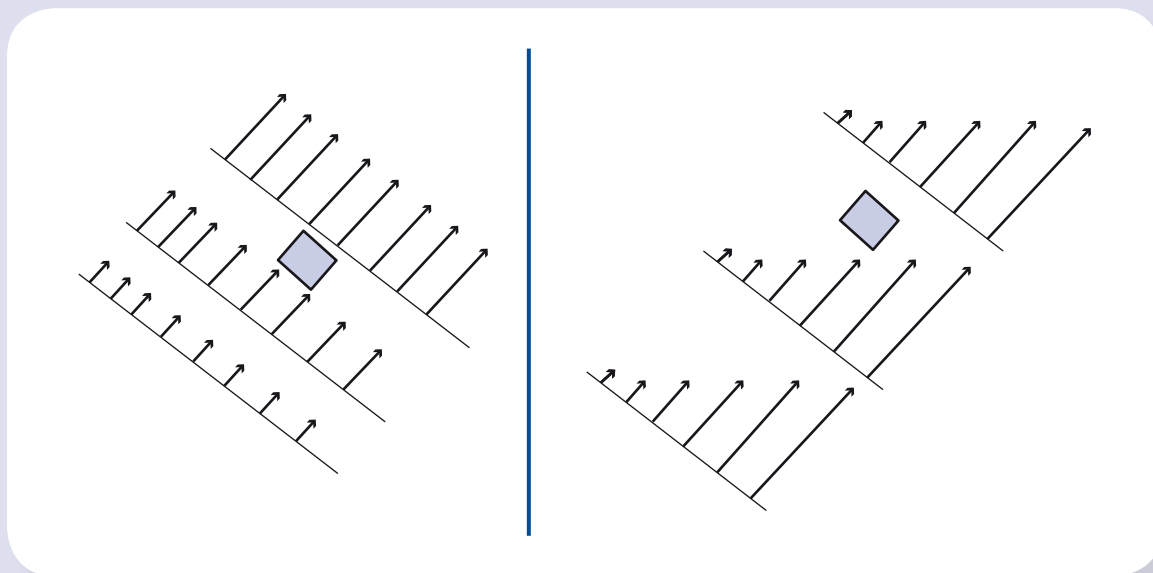
11. Consideremos una esfera de radio α con centro en el origen.

- a) De acuerdo con la consideración 7, el diferencial de área de la superficie esférica está dado por la fórmula $dS = a^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta$. Calcula la carga eléctrica total sobre la superficie si la densidad superficial de carga está dada por la fórmula $\sigma(\theta, \varphi) = \varphi$.
- b) De acuerdo con la consideración 7, el diferencial de volumen del sólido esférico está dado por la fórmula $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta$. Calcula la carga eléctrica total sobre el sólido esférico si la densidad volumétrica de carga está dada por la fórmula $f(\rho, \theta, \varphi) = \rho$.

12. A continuación se muestra un aspecto cualitativo de los campos laminares (bidimensionales) $\vec{v}_1(x, y) = x\vec{i}$ y $\vec{v}_2(x, y) = y\vec{j}$; explica en términos de flujos si la divergencia de estos campos es negativa, positiva o nula. Confirma tu respuesta aplicando la fórmula de la divergencia.



13. Explica qué pasa con la divergencia de cada campo, ¿es nula, positiva o negativa?



14. Sabemos que si un fluido se mueve en el espacio tridimensional de acuerdo con el campo de velocidades $\vec{v}(x, y, z)$, el flujo \mathcal{F} del fluido a través de una pequeña superficie cerrada \mathcal{S} se puede aproximar con la fórmula

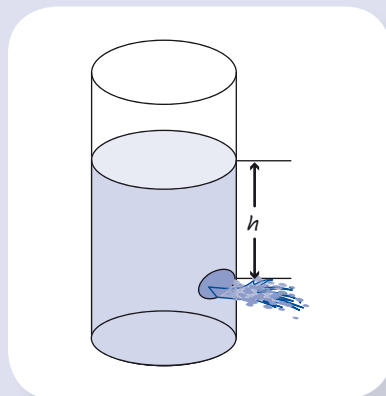
$$\mathcal{F} \approx (\text{Div}(\vec{v})(x_0, y_0, z_0))v,$$

donde (x_0, y_0, z_0) es un punto interior a la superficie cerrada \mathcal{S} , y v es el volumen del sólido encerrado por \mathcal{S} .

Supongamos que $\vec{v}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + y^2z^2\mathbf{k}$. Calcula el flujo aproximado a través de \mathcal{S} si:

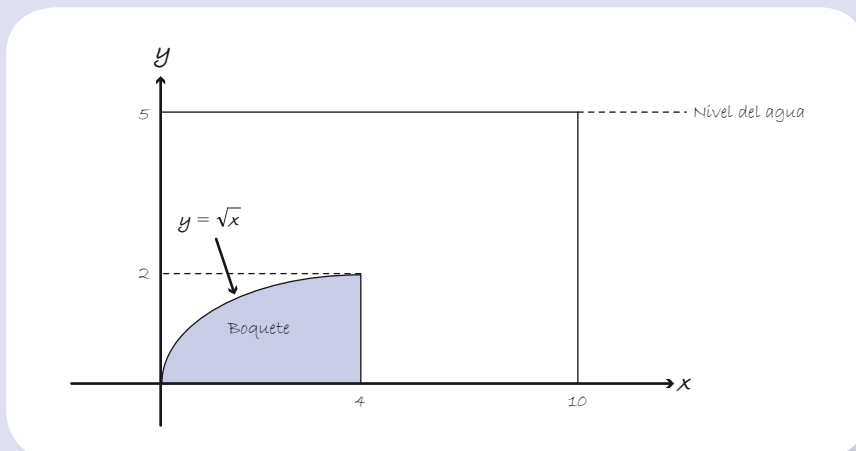
- \mathcal{S} es una superficie cúbica con centro en $(1, 1, 1)$ y cuyas aristas tienen 0.1 de longitud.
 - \mathcal{S} es la superficie esférica con centro en $(1, 1, 1)$ y radio 0.05 .
15. Principio de Torricelli.

Consideremos a un recipiente con agua que tiene un pequeño orificio en la parte inferior. El principio de Torricelli establece que el agua sale del tanque por el orificio perpendicularmente a la pared del recipiente con una velocidad igual a la que tendría un cuerpo al pasar por el centro del orificio si cayera verticalmente desde una altura igual al nivel del agua en el recipiente.



Si v es la velocidad con la que sale el agua por el orificio y h es la profundidad del orificio respecto al nivel del agua en el tanque, entonces $v = \sqrt{2gh}$.

En la siguiente figura se muestra un boquete en la parte inferior izquierda de la pared de un recipiente lleno de agua. Toma en cuenta el principio de Torricelli y calcula el flujo a través del boquete en el instante en que el nivel del agua está a 5 metros de la base del boquete.



Circulación y teorema del rotacional

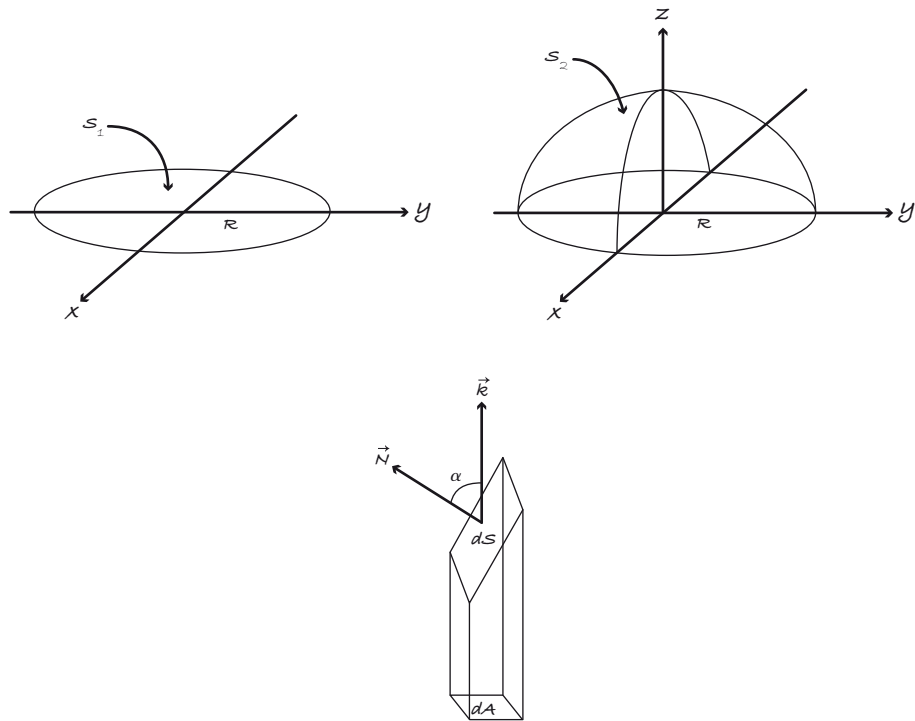
En este tema, usando las ideas de flujo y circulación en el terreno de lo infinitesimal, construiremos el concepto de rotacional de un campo, y ligado a él, el teorema del rotacional (o de Stokes). Este concepto y su teorema constituyen un poderoso elemento de análisis para los campos vectoriales. De hecho, hablar de un campo que tiene “rotacional” es hablar de una característica: no es campo gradiente, y de un comportamiento local: provoca un “giro”. Igual que en el caso de la divergencia, veremos al rotacional y su teorema participar en importantes aplicaciones de la electricidad y la mecánica de fluidos. En el último punto de este tema haremos una reflexión sobre las similitudes que guardan todos los “teoremas fundamentales” que han sido considerados en los tres tomos de la obra a la que pertenece este libro.

Iniciamos este tema con una situación-problema que en principio nos lleva a reconocer la existencia de un tipo de campo vectorial cuyo flujo a través de superficies con un borde común es el mismo. Esto es similar a lo que sucede con los campos gradientes estudiados en la Unidad 2, que poseen la propiedad de que el trabajo que realizan a lo largo de curvas con los mismos extremos tiene siempre el mismo valor. Estos campos son los campos rotacionales y guardan con el flujo la misma relación que guardan los campos gradientes con el trabajo.

Situación-Problema 13 (SP-13)

1. Considera el campo vectorial $\vec{E}_1 = z\vec{k}$. Calcula el flujo a través de las siguientes superficies en la dirección que se indica.
 - a) S_1 es la superficie correspondiente al disco encerrado por la circunferencia de radio R en el plano xy con centro en el origen, y la dirección está dada por el vector normal unitario $\vec{N} = \vec{k}$.
 - b) S_2 es la superficie correspondiente a la mitad superior del cascarón esférico de radio R con centro en el origen, y la dirección está dada por \vec{N} , el vector normal unitario hacia fuera de la esfera.

Sugerencia: Para el inciso b) toma en cuenta como cierto lo siguiente: si tomamos una porción infinitesimal de superficie dS cuyo vector normal unitario \vec{N} forma un ángulo α con el vector \vec{k} , el producto “ $dS \cos \alpha$ ” resulta ser el área dA de su proyección en el plano xy , como se ilustra en la tercera de las siguientes figuras.



2. Considera ahora al campo vectorial $\vec{E}_2 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calcula el flujo a través de las mismas superficies del punto anterior y en las mismas direcciones indicadas.
3. Calcula ahora la circulación (o trabajo) a lo largo de la circunferencia de radio R con centro en el origen y en el sentido contrario a las manecillas del reloj del campo vectorial $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$. ¿Qué puedes decir del valor que obtuviste en relación con los valores obtenidos en el punto 1?

Discusión de la Situación-Problema 13

Consideremos el campo vectorial $\vec{E}_1 = 2\vec{k}$. Para el cálculo del flujo a través de S_1 (círculo en el plano xy con centro en el origen y de radio R) notemos que el campo es constante (y perpendicular a la superficie), la superficie es plana y la dirección hacia donde se calcula el flujo es la misma que la del campo, por lo tanto, el flujo es simplemente:

$$\Phi = |\vec{E}_1|(\text{Área de } S_1) = (2)(\pi R^2) = 2\pi R^2.$$

Tomemos de nuevo el campo vectorial $\vec{E}_1 = 2\vec{k}$. El flujo de este campo a través de la superficie S_2 (medio cascarón esférico superior) en la dirección indicada se calcula así:

$$\Phi = \iint_{S_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} |\vec{E}_1| |d\vec{S}| \cos \alpha = \iint_{S_2} 2 dS \cos \alpha.$$

Ahora bien, tomando en cuenta el resultado indicado en la sugerencia para el inciso *b*) (y que será probado en las consideraciones de esta SP-13), el cual establece que $dA = dS \cos \alpha$, donde dS es el área de una región infinitesimal de la media esfera y dA es el área de la proyección en el plano xy de esa región infinitesimal. Entonces el flujo adopta la forma:

$$\Phi = \iint_{S_2} 2dS \cos \alpha = \iint_{S_1} 2dA,$$

donde S_1 es el círculo en el plano xy con centro en el origen (de hecho, es la superficie del inciso *a*); detrás de esta igualdad de integrales está el hecho de que las proyecciones en el plano xy de todas las regiones infinitesimales en la media esfera cubren todo el círculo. Tenemos entonces que el flujo es

$$\Phi = \iint_{S_1} 2dA = 2 \iint_{S_1} dA.$$

Es decir, el flujo es numéricamente igual a dos veces el área del círculo; expresado en símbolos:

$$\Phi = (2)(\pi R^2) = 2\pi R^2.$$

Vemos entonces que el flujo que se pide en los incisos *a*) y *b*) del punto uno de la SP-13 es el mismo. Más adelante, en las consideraciones de esta SP-13, veremos que este resultado no es casual; de hecho, probaremos que el flujo de este campo no depende de la superficie en sí, sino solo del borde (en este caso la circunferencia de radio R con centro en el origen del plano xy). Al resolver el punto dos de esta SP-13, nos daremos cuenta que no todos los campos vectoriales tienen la propiedad mencionada, ya que el flujo para el campo considerado ahí es diferente para las dos superficies dadas. Veamos.

Consideremos al campo vectorial $\vec{E}_2 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; el flujo a través de la superficie S_1 en dirección de $\vec{N} = \vec{k}$ es:

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (dS\vec{k}) = \iint_{S_1} z dS.$$

Ahora bien, esta última integral es 0 ya que S_1 está en el plano xy , y en él, $z = 0$.

Calculemos ahora el flujo del mismo campo vectorial \vec{E}_2 , pero ahora a través de la superficie S_2 (el medio cascarón esférico). Para tal efecto hay que notar que $\vec{E}_2(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ es radial, de hecho, es el campo de posiciones de los puntos en el espacio tridimensional, o sea, este campo va en la misma dirección del vector normal exterior a la superficie: el campo va en la misma dirección en la que se quiere calcular el flujo, entonces podemos escribir

$$\Phi = \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} |\vec{E}_2| |d\vec{S}| = \iint_{S_2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS.$$

Si se reconoce que los puntos de S_2 (la media esfera de radio R) satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, entonces el flujo es:

$$\Phi = \iint_{S_2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS = \iint_{S_2} R dS = R \iint_{S_2} dS.$$

Y, por lo tanto, el flujo es, numéricamente hablando, $\Phi = \mathcal{R}$ (el área de \mathcal{S}_2) = \mathcal{R} (área de la media esfera de radio \mathcal{R}) = $\mathcal{R}(2\pi\mathcal{R}^2)$, por lo tanto, el flujo es $\Phi = 2\pi\mathcal{R}^3$.

Notemos, como ya habíamos anticipado, que el flujo de \vec{E}_2 a través de las dos superficies es distinto, contrario a lo que sucedió con el flujo de \vec{E}_1 a través de esas dos superficies, que resultó ser el mismo.

Veamos ahora el punto 3 de la SP-13; en él se pide calcular la circulación (o trabajo) del campo vectorial $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ a lo largo de la circunferencia de radio \mathcal{R} con centro en el origen y en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Recordemos que la circulación del campo \vec{E} , que abreviaremos como $\text{Circ}(\vec{E})$, a lo largo de una curva cerrada \mathcal{C} es la integral de línea: $\text{Circ}(\vec{E}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, donde $d\vec{l}$ es el vector (infinitesimal) de desplazamiento en la dirección de la curva.

En este caso el campo es $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, y ya sabemos que $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, por lo tanto:

$$\text{Circ}(\vec{v}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} (-y\vec{i} + x\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \oint_{\mathcal{C}} -ydx + xdy.$$

Resolvamos esta integral de línea parametrizando tanto la curva como la forma diferencial que está en el integrando. La curva \mathcal{C} es la circunferencia de radio \mathcal{R} con centro en el origen, y es recorrida en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Si consideramos las ecuaciones $x = \mathcal{R} \cos t$ y $y = \mathcal{R} \sin t$, los puntos (x, y) del plano están sobre la circunferencia \mathcal{C} , ya que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = \mathcal{R}^2$. Además, si se asignan valores a t , empezando en 0 por ejemplo y terminando en 2π , los puntos correspondientes (x, y) recorren por completo la circunferencia y lo hacen en el sentido contrario a las manecillas del reloj. La forma diferencial del integrando $-ydx + xdy$ puede escribirse en términos de t (parametrizarse) usando que $x = \mathcal{R} \cos t$ y $y = \mathcal{R} \sin t$ y que los diferenciales respectivos son: $dx = -\mathcal{R} \sin(t)dt$ y $dy = \mathcal{R} \cos(t)dt$. Tenemos entonces que $-ydx + xdy = -(\mathcal{R} \sin t)(-\mathcal{R} \sin t dt) + (\mathcal{R} \cos t)(\mathcal{R} \cos t dt) = \mathcal{R}^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \mathcal{R}^2 dt$.

Por lo tanto, la circulación pedida es:

$$\text{Circ}(\vec{v}) = \oint_{\mathcal{C}} -ydx + xdy = \int_{t=0}^{t=2\pi} \mathcal{R}^2 dt = 2\pi\mathcal{R}^2.$$

Una forma diferente de calcular la circulación del campo \vec{v} a lo largo de la circunferencia \mathcal{C} en el plano xy , de radio \mathcal{R} y centrada en el origen, se basa en la observación de que \vec{v} es un campo circular o tangente a la circunferencia y en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Para constatarlo es suficiente verificar que las líneas de este campo son precisamente las circunferencias con centro en el origen (te invitamos a probar esto), y que su magnitud es constante en todos los puntos de una circunferencia con centro en el origen con un valor igual al radio de la circunferencia. Tomando esto en cuenta tenemos que

$$\text{Circ}(\vec{v}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} |\vec{v}| dl \cos(0) = \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{R} dl = \mathcal{R} \oint_{\mathcal{C}} dl = \mathcal{R}(2\pi\mathcal{R}) = 2\pi\mathcal{R}^2.$$

(Recordemos que estamos calculando la circulación en el sentido contrario a las manecillas del reloj.)

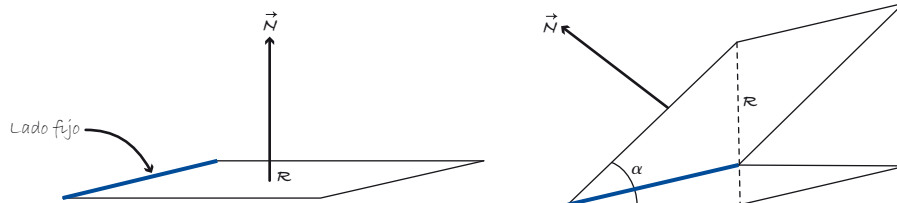
Observemos entonces que la circulación del campo $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ a lo largo de la circunferencia coincide con el valor del flujo de $\vec{E}_\perp = 2\vec{k}$ a través de las dos superficies dadas en el problema 1 y que tienen como borde o frontera a la misma circunferencia. En las consideraciones que haremos enseguida, descubriremos la característica que tiene el campo $\vec{E}_\perp = 2\vec{k}$ y que lo relaciona con $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ de tal manera que el flujo del primero a través de una superficie es la circulación del segundo a lo largo de la frontera o borde de la superficie. Estableceremos que $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ es una especie de antiderivada del campo $\vec{E}_\perp = 2\vec{k}$ y que el flujo de este, o sea la integral sobre la superficie, es la antiderivada “evaluada” (la circulación de \vec{v}) en el extremo (o borde), lo cual nos lleva a un teorema fundamental que relaciona el flujo con la circulación y que será discutido más adelante.

Consideraciones alrededor de la Situación-Problema 13

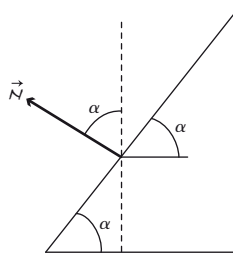
1. La fórmula $dA = dS \cos \alpha$

En este primer punto probaremos el resultado enunciado en la sugerencia que hicimos para calcular el flujo del campo $\vec{E}_\perp = 2\vec{k}$ a través de la superficie dada en el inciso b) del punto 1 de la SP-13.

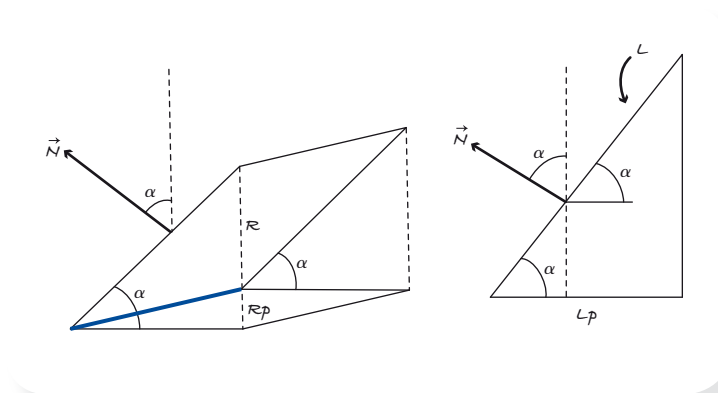
Tomemos un rectángulo horizontal R con su normal dirigida al eje z positivo. Fijando uno de sus lados y apoyándose en él, se levanta el rectángulo (se gira hacia el eje z positivo) hasta formar un ángulo α con el plano horizontal. El siguiente dibujo muestra primero el rectángulo horizontal y enseguida, el levantado.



De la siguiente vista lateral se puede apreciar que el vector normal del rectángulo R también forma un ángulo α con el eje z positivo.



Denotemos por \mathcal{R}_p el rectángulo en el plano horizontal, que corresponde a la proyección de \mathcal{R} en ese plano. Podemos ver en las figuras siguientes que \mathcal{R} y \mathcal{R}_p tienen un lado en común que podemos ver como el ancho de los dos rectángulos, denotemos su longitud por M . Sean también L y L_p el largo de los rectángulos \mathcal{R} y \mathcal{R}_p , respectivamente.



Observamos que $L_p = L \cos \alpha$; de aquí se obtiene que el área del rectángulo \mathcal{R}_p es

$$A(\mathcal{R}_p) = (L_p)(M) = (L \cos \alpha)(M) = (LM) \cos \alpha = A(\mathcal{R}) \cos \alpha.$$

Es decir, el área de la proyección es el área del rectángulo inclinado multiplicada por el coseno del ángulo de inclinación:

$$A(\mathcal{R}_p) = A(\mathcal{R}) \cos \alpha.$$

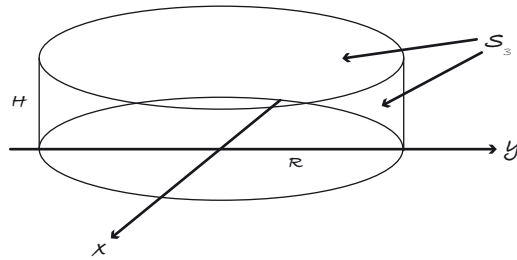
Este resultado es cierto también para rectángulos de lados infinitesimales: si dS es el área del rectángulo girado un ángulo α respecto al plano horizontal y dA es el área del rectángulo proyectado, se tiene entonces que

$$dA = dS \cos \alpha.$$

2. Campos rotacionales

Así como existen campos para los cuales el trabajo no depende de la trayectoria empleada, sino solo de *sus extremos*, estos son los campos gradientes; también hay campos para los cuales el flujo no depende de la superficie considerada, sino sólo de *su borde o frontera*. Estos son los **campos rotacionales**; veremos en este punto que el campo $\vec{E}_1 = \mathcal{R}\vec{k}$ tratado en la SP-13 es uno de ellos. Más adelante veremos la razón del nombre rotacional.

Antes de demostrarlo, y sólo para enfatizar lo que decimos, consideremos una tercera superficie, \mathcal{S}_3 , como la superficie de un cilindro de altura H con base en el plano xy de radio R y con centro en el origen, pero sin considerar la tapa de la base. (Esto es, \mathcal{S}_3 consiste en la superficie lateral del cilindro junto con la tapa superior.)



Es fácil corroborar que el flujo del campo $\vec{E}_1 = 2\vec{k}$ a través de esta nueva superficie tiene el mismo valor que el flujo ($2\pi R^2$) calculado a través de las superficies S_1 y S_2 . De hecho, el flujo a través de la superficie cilíndrica lateral de S_3 es nulo (el campo es perpendicular al vector normal unitario ahí) y el flujo a través de la tapa superior es idéntico al flujo a través de la superficie S_1 .

Observemos que tanto las superficies S_1 y S_2 como la nueva superficie S_3 tienen el mismo borde o frontera, a saber, la circunferencia en el plano xy de radio R con centro en el origen.

De hecho, no importa qué superficie S consideremos cuyo borde sea esta circunferencia, el flujo del campo $\vec{E}_1 = 2\vec{k}$ a través de ella siempre tiene el mismo valor ya obtenido, ya que, en general, el flujo a través de la superficie S es

$$\Phi = \iint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_S 2dS \cos \alpha = \iint_{S_1} 2dA = 2 \iint_{S_1} dA = 2\pi R^2.$$

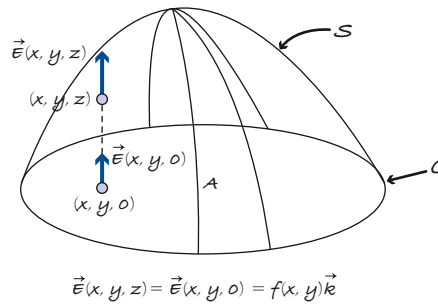
Esto es porque $dS \cos \alpha = dA$, donde dA es el área de la proyección horizontal en el plano xy de la porción de superficie con área dS .

Esto contrasta con lo que ocurre con el campo \vec{E}_2 , ya que el flujo del campo \vec{E}_2 a través de S_1 es cero, y a través de S_2 es $2\pi R^3$. Es decir, aunque las superficies S_1 y S_2 tienen el mismo borde, el flujo del campo \vec{E}_2 a través de ellas no es el mismo.

La propiedad del campo $\vec{E}_1 = 2\vec{k}$, de que su flujo a través de cualquier superficie S con borde en la circunferencia del plano xy centrada en el origen y radio R siempre tiene el mismo valor, se hace extensiva a cualquier campo del estilo $\vec{E}(x, y, z) = f(x, y)\vec{k}$ y a cualquier curva cerrada C en el plano xy , en el siguiente sentido: para cualquier superficie S que tenga a C como borde, el flujo del campo a través de la superficie tiene el mismo valor.

Para comprobar esto considérese una porción infinitesimal de área dS de una superficie arbitraria S con borde C : sea (x, y, z) un punto en dicha porción, el diferencial de flujo del campo \vec{E} a través de la porción considerada (observa la figura) está dado por

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = f(x, y)dS \cos \alpha = f(x, y)dA.$$



Advierte que se ha utilizado $dA = dS \cos \alpha$, se ha supuesto que $f(x, y) > 0$ y además se supone que el campo es constante en esa porción infinitesimal e igual al valor del campo en el punto (x, y, z) . El flujo total sería:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_A f(x, y) dA,$$

donde A es la proyección de S en el plano xy , es decir, la región del plano xy encerrada por el borde C .

Como puede verse, el flujo no depende de la superficie S que estemos considerando, siempre y cuando tengan el mismo borde C . Un argumento similar puede llevarse a cabo cuando $f(x, y) < 0$ tomando como base que los cosenos de ángulos suplementarios difieren en signo.

Los campos que tienen la propiedad de que sus flujos no dependen de la superficie, sino solamente del borde que las superficies tengan, como los que tienen la forma $\vec{E}(x, y, z) = f(x, y)\vec{k}$, son campos muy especiales, son los campos rotacionales, y juegan —con el flujo y las superficies— un papel análogo al papel que desempeñan los campos gradientes con el trabajo y las trayectorias.

3. Analogía entre campos rotacionales y campos gradientes

Recordemos las ideas fundamentales de los campos gradientes y las integrales de línea para precisar la analogía con los campos rotacionales y las integrales de superficie.

Un campo \vec{E} se dice que es gradiente, si existe una función escalar φ llamada *función potencial de \vec{E}* tal que el gradiente de φ es \vec{E} , en símbolos: $\nabla \varphi = \vec{E}$.

Se sabe que si el campo \vec{E} es gradiente y φ su función potencial, el trabajo de \vec{E} para ir de un punto A a un punto B es independiente de la trayectoria que va de A a B y es igual a la diferencia de valores de la función potencial en los extremos de la trayectoria A y B ; en símbolos:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

que también puede escribirse así:

$$\int_A^B \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Este resultado se conoce como **teorema fundamental de las integrales de línea**.

Sabemos que dada una función escalar $z = f(x, y, z)$, su gradiente es el campo

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\vec{k}.$$

Veamos ahora la analogía con campos rotacionales.

Se dice que un campo \vec{E} es rotacional si existe un campo (*función vectorial*) \vec{v} , que llamaremos *campo primitivo* de \vec{E} , tal que el rotacional de \vec{v} es \vec{E} , en símbolos: $\text{Rot}(\vec{v}) = \vec{E}$. Posteriormente veremos cómo se obtiene el campo rotacional \vec{E} a partir del campo primitivo \vec{v} .

Se ha estipulado que si el campo \vec{E} es rotacional y \vec{v} es su campo primitivo, el flujo de \vec{E} a través de una superficie con borde la curva cerrada \mathcal{C} es independiente de la superficie, y es igual a la circulación del campo primitivo \vec{v} a lo largo de la curva (que se puede decir que es el extremo de la superficie). En símbolos:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l},$$

que también puede escribirse así:

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{Rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l},$$

y se conoce como **teorema del rotacional**.

La función potencial y el campo primitivo son especies de “antiderivadas” para los campos gradientes y rotacionales, respectivamente; en tanto, el gradiente y el rotacional son considerados como especie de “derivadas” de la función potencial y el campo primitivo, respectivamente.

En el siguiente punto de estas consideraciones veremos describir el rotacional de un campo en términos de sus componentes y daremos una prueba del teorema del rotacional. Quedará entonces claro que $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ es un campo primitivo de $\vec{E}_{\perp} = z\vec{k}$, es decir, $\text{Rot}(\vec{v}) = \vec{E}_{\perp}$.

En la última consideración de este tema haremos una reflexión sobre los tres teoremas tratados en este libro: el de las integrales de línea, el de la divergencia (integrales de volumen) y el del rotacional (integrales de superficie). Haremos una analogía con el llamado teorema fundamental del cálculo, abordado en los tomos anteriores; podremos apreciar entonces las ideas fundamentales que recorren toda la obra.

4. Rotacional de un campo y teorema del rotacional (o de Stokes)

Dado un campo \vec{E} se quiere construir otro, el rotacional de \vec{E} , $\text{Rot}(\vec{E})$ de tal modo que se cumpla:

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{Rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (3.1)$$

donde \mathcal{S} es cualquier superficie cuyo borde es \mathcal{C} .

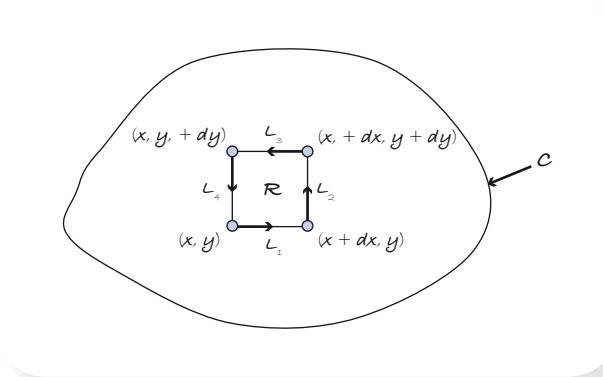
Notemos que esta fórmula puede usarse de dos maneras esencialmente distintas: *a*) si se quiere saber el flujo de un campo a través de una superficie rodeada por una curva cerrada y se sabe que este campo es el rotacional de otro campo, el primitivo, entonces se puede calcular la circulación a lo largo de la curva cerrada del campo

primitivo; b) si se desea calcular la circulación de un campo a lo largo de una curva cerrada, se puede proceder calculando el flujo del rotacional del campo a través de una superficie (la que sea) bordeada por la curva dada.

En este punto calcularemos el rotacional de un campo y veremos que de manera natural se comprueba el teorema del rotacional. Lo haremos tomando primero un campo plano $\vec{E} = \vec{E}(x, y)$ (que pudiera, por ejemplo, representar a un campo de velocidades de un fluido laminar) y después calcularemos el rotacional de un campo vectorial tridimensional.

Digamos que el propósito inicial es obtener la circulación de $\vec{E} = \vec{E}(x, y)$ a lo largo de la curva cerrada \mathcal{C} recorrida en el sentido contrario a las manecillas del reloj; es decir, se quiere obtener el lado derecho de la igualdad (3.1). Para ello desarrollemos los siguientes dos apartados: uno donde se calcula la circulación alrededor de un rectángulo infinitesimal y el siguiente donde vemos que con la suma de esas circulaciones infinitesimales se consigue la circulación a lo largo de \mathcal{C} .

a) *Circulación alrededor de un rectángulo infinitesimal.* Tomemos un punto (x, y) dentro de la región encerrada por \mathcal{C} y construyamos un rectángulo \mathcal{R} de lados infinitesimales, siendo el punto uno de sus vértices, como se ve en la figura siguiente.



Para calcular la circulación de \vec{E} alrededor de \mathcal{R} , notemos que el campo, aunque variable, puede suponerse como constante en cada uno de los lados. Consideremos que el valor del campo en (x, y) es el mismo para todos los puntos de los lados L_1 y L_4 , que limitan por abajo y por la izquierda, respectivamente, a \mathcal{R} ; que el valor del campo en $(x + dx, y)$ es el mismo para todos los puntos del lado L_2 , que limita por la derecha a \mathcal{R} , y que el valor en $(x, y + dy)$ es el mismo en todos los puntos del lado L_3 que limita por arriba a \mathcal{R} . Entonces la circulación alrededor de \mathcal{R} es la suma de las siguientes cantidades correspondientes a cada lado:

$$L_1 \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}(x, y) \cdot d\vec{l} = [\epsilon_1(x, y)\vec{i} + \epsilon_2(x, y)\vec{j}] \cdot (dx\vec{i}) = \epsilon_1(x, y)dx$$

$$L_2 \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}(x + dx, y) \cdot d\vec{l} = [\epsilon_1(x + dx, y)\vec{i} +$$

$$\epsilon_2(x + dx, y)\vec{j}] \cdot (dy\vec{j}) = \epsilon_2(x + dx, y)dy.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \vec{E}(x, y + dy) \cdot d\vec{l} = [\epsilon_1(x, y + dy)\vec{i} + \\ &\quad \epsilon_2(x, y + dy)\vec{j}] \cdot (-dx\vec{i}) = -\epsilon_1(x, y + dy)dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \vec{E}(x, y + dy) \cdot d\vec{l} = [\epsilon_1(x, y + dy)\vec{i} + \\ &\quad \epsilon_2(x, y + dy)\vec{j}] \cdot (-dx\vec{i}) = -\epsilon_1(x, y + dy)dx. \end{aligned}$$

Arreglando la suma así:

$$(\epsilon_2(x + dx, y) - \epsilon_2(x, y))dy - (\epsilon_1(x, y + dy) - \epsilon_1(x, y))dx,$$

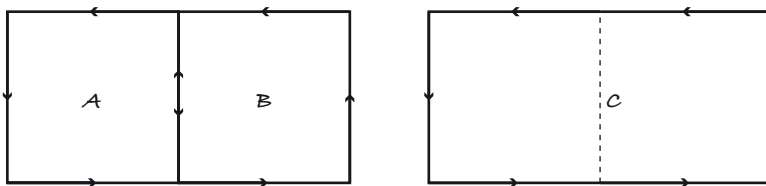
y dándole la forma

$$\left(\frac{\epsilon_2(x, y + dx) - \epsilon_2(x, y)}{dx} \right) dx dy - \left(\frac{\epsilon_1(x, y + dy) - \epsilon_1(x, y)}{dy} \right) dx dy$$

Se obtiene que la circulación alrededor de \mathcal{R} es:

$$\left(\frac{\partial \epsilon_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \epsilon_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

b) La suma de las circulaciones de dos rectángulos infinitesimales con un lado en común. Supongamos que \mathcal{C}_A es la circulación de un campo alrededor del rectángulo infinitesimal \mathcal{A} . Imaginemos otro rectángulo infinitesimal \mathcal{B} con circulación \mathcal{C}_B y que tiene un lado común con el primero, como se muestra en la figura siguiente. La unión de los dos rectángulos \mathcal{A} y \mathcal{B} forman el rectángulo \mathcal{C} .



Si se calcula la circulación alrededor de \mathcal{C} , veremos que esta corresponde a la suma de las circulaciones de los rectángulos \mathcal{A} y \mathcal{B} ; es decir:

$$\mathcal{C}_C = \mathcal{C}_A + \mathcal{C}_B$$

Esta afirmación se apoya en el hecho de que, aunque el cálculo de \mathcal{C}_A incluye la aportación del lado derecho a la circulación alrededor de \mathcal{A} y el de \mathcal{C}_B , la aportación del

lado izquierdo, al considerar la suma $C_A + C_B$, los aportes de los dos lados se eliminan porque solo difieren en el signo y esto se explica porque para el lado derecho del rectángulo A , $d\vec{l} = dy\vec{j}$, mientras que para el lado izquierdo de B es $d\vec{l} = -dy\vec{j}$. Recordemos que estamos calculando la circulación a lo largo de la frontera de cada rectángulo en el sentido contrario a las manecillas del reloj y que el campo tiene el mismo valor (constante) en la frontera común a los dos rectángulos.

Los dos resultados descritos en los incisos anteriores ayudan a visualizar la circulación a lo largo de una curva cerrada de un modo diferente al dado por la integral

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Veamos. Consideremos una curva cerrada C ; en cada punto (x, y) de la región S del plano encerrada por la curva colocamos un rectángulo infinitesimal y calculamos la circulación del campo \vec{E} alrededor de él. Al sumar las circulaciones en cada rectángulo se tendrá la circulación a lo largo de la curva C , ya que en este proceso solo “sobreviven” las aportaciones de los lados externos, y los lados externos “últimos” forman precisamente la curva C . En símbolos, podemos escribir la circulación a lo largo de la curva C así:

$$Circ = \iint_S \left(\frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy. \quad (3.2)$$

Este resultado nos permite hacer las siguientes consideraciones:

- Ya que $\left(\frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$ corresponde a la circulación alrededor de un rectángulo infinitesimal, y la suma de estas circulaciones corresponde a la circulación alrededor de la curva C , podemos decir que esta cantidad infinitesimal corresponde a un diferencial de la circulación, es decir,

$$dCirc = \left(\frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y) \right) dS. \quad (3.3)$$

- Por otro lado, la integral doble que aparece en (3.2) se puede ver como el flujo a través de la superficie S y en dirección de \vec{k} del campo

$$\left(\frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y) \right) \vec{k}.$$

Este campo se conoce como **rotacional** del campo \vec{E} . Es decir,

$$\text{Rot}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y) \right) \vec{k}.$$

De la igualdad (3.3) se tiene que

$$\frac{dCirc}{dS} = \left(\frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y) \right).$$

Entonces la razón (instantánea) de cambio de la circulación del campo a lo largo de una curva (en el sentido contrario a las manecillas del reloj) respecto al área interior, en un determinado punto, coincide con la magnitud del rotacional en el punto cuando es positiva (y el rotacional va en la dirección de \vec{k}) y con la magnitud del rotacional con signo negativo cuando es negativa (y el rotacional va en la dirección de $-\vec{k}$).

Por lo pronto podemos ver de inmediato que se cumple el **teorema del rotacional** (por lo menos en el plano, donde algunos lo conocen como teorema de Green).

Teorema del rotacional

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{Rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

Consideremos algunos puntos en relación con el rotacional y su teorema.

Ejemplo. (Cálculo del rotacional). Consideremos el campo $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, que aparece en el punto 3 de la SP-13 con la que inicia este Tema 2 de la Unidad 3. Si aplicamos la fórmula del rotacional

$$\text{Rot}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \vec{k},$$

tenemos entonces que

$$\text{Rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \vec{k} = (1 - (-1))\vec{k} = 2\vec{k},$$

de donde $\text{Rot}(\vec{v}) = 2\vec{k} = \vec{E}_1$, que es el campo del punto 1 de la misma SP. Ya sabemos entonces por qué el flujo de \vec{E}_1 a través de las superficies dadas (de hecho, pudieron haber sido cualesquiera) con el mismo borde, corresponde a la circulación de \vec{v} a lo largo del borde.

- Construcción del rotacional del campo

$$\vec{E}(x, y, z) = E_1(x, y, z)\vec{i} + E_2(x, y, z)\vec{j} + E_3(x, y, z)\vec{k}.$$

El rotacional de \vec{E} debe ser un campo tal que en cada punto (x, y, z) se tenga que al tomar una porción plana infinitesimal (no paralela al eje z) con área dS que contenga al punto, la circulación del campo \vec{E} a lo largo de la frontera de esta porción, manteniendo a la porción siempre a la izquierda conforme se recorre la frontera, sea igual al flujo del rotacional a través de la porción en dirección positiva del eje z , es decir, igual a $\text{Rot}(\vec{E})(x, y, z) \cdot d\vec{S}$, donde $d\vec{S}$ es el vector de magnitud dS , normal a la porción plana y formando un ángulo menor a 90° con la dirección positiva del eje z .

Tomaremos una porción plana infinitesimal de área dS que pertenece al plano con ecuación $z = ax + by + c$, de tal forma que su proyección en el plano xy es un rectángulo de dimensiones dx y dy con centro en el punto (x, y) .

Un vector normal al plano es $\vec{n} = -a\vec{i} - b\vec{j} + \vec{k}$. Una manera para obtener este vector es ver al plano como una superficie de nivel de la función de tres variables $f(x, y, z) = z - ax - by$; entonces el vector gradiente de la función f , que es perpendicular a la superficie, es el vector \vec{n} .

La relación entre el área dS de la porción plana y el área $dydx$ de su proyección está dada por la ecuación $dydx = dS \cos \varphi$ donde φ es el ángulo que forma el vector normal \vec{N} con la parte positiva del eje z .

Como $\vec{N} \cdot \vec{k} = |\vec{N}| \cos \varphi$, pero también $\vec{N} \cdot \vec{k} = 1$, tenemos que

$$\cos \varphi = \frac{1}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

El vector \overline{dS} se obtiene así:

$$\begin{aligned} \overline{dS} &= dS \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = (\sec \varphi) dydx \frac{-a\vec{i} - b\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \\ &\sqrt{a^2 + b^2 + 1} dydx \frac{-a\vec{i} - b\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = dydx(-a\vec{i} - b\vec{j} + \vec{k}). \end{aligned}$$

Calcularemos ahora la circulación del campo \vec{E} a lo largo de la frontera de la porción plana infinitesimal manteniendo siempre a la porción a la izquierda de la frontera conforme ésta se recorre.

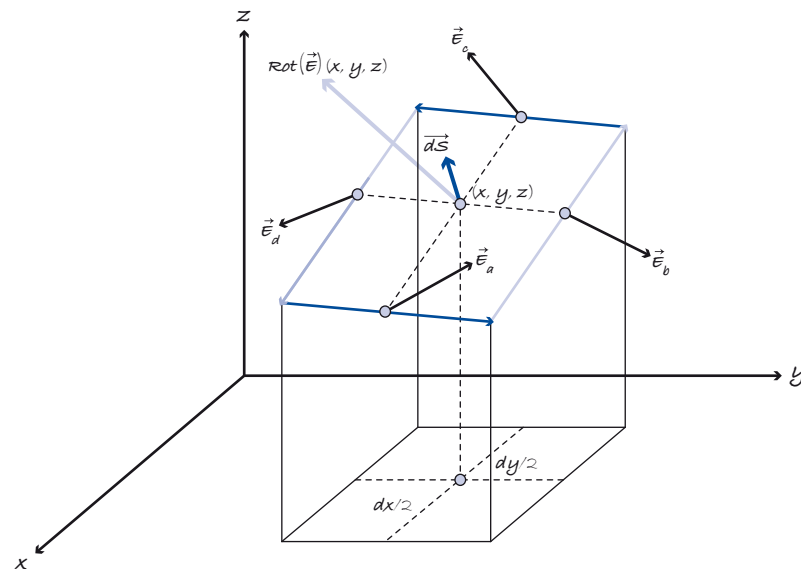
Los vectores de desplazamiento que corresponden a los lados de la porción plana considerada y sus correspondientes vectores del campo \vec{E} son:

$$\begin{aligned} \overline{dl}_1 &= dy\vec{j} + bdy\vec{k} \text{ (color azul marino) va con el vector} \\ \vec{E}_a &= \vec{E}(x + dx/2, y, z + adx/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{dl}_3 &= -dy\vec{j} - bdy\vec{k} \text{ (color azul marino) va con el vector} \\ \vec{E}_c &= \vec{E}(x - dx/2, y, z - adx/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{dl}_2 &= -dx\vec{j} - adx\vec{k} \text{ (color azul claro) va con el vector} \\ \vec{E}_b &= \vec{E}(x, y + dy/2, z + bdy/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{dl}_4 &= dx\vec{j} + adx\vec{k} \text{ (color azul claro) va con el vector} \\ \vec{E}_d &= \vec{E}(x, y - dy/2, z - bdy/2) \end{aligned}$$



La circulación de \vec{E} sobre la frontera de la porción plana es:

$$dC = (\vec{E}_a \cdot \vec{dl}_1 + \vec{E}_b \cdot \vec{dl}_3) + (\vec{E}_b \cdot \vec{dl}_2 + \vec{E}_a \cdot \vec{dl}_4) =$$

$$E_2(x + dx/2, y, z + adx/2)dy + E_3(x + dx/2, y, z + adx/2)b dy$$

$$-E_2(x - dx/2, y, z + adx/2)dy - E_3(x - dx/2, y, z - adx/2)b dy$$

$$-E_1(x, y + dy/2, z + bdy/2)dx - E_3(x, y + dy/2, z + bdy/2)adx$$

$$+E_1(x, y - dy/2, z - bdy/2)dx + E_3(x, y - dy/2, z - bdy/2)adx.$$

Y agrupando los términos que señalan las flechas, tenemos que

$$dC = \frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y, z)dxdy + \frac{\partial E_2}{\partial z}(x, y, z)adx dy + \frac{\partial E_3}{\partial x}(x, y, z)b dxdy + \frac{\partial E_3}{\partial z}(x, y, z)ab dxdy$$

$$- \left[\frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y, z)dxdy + \frac{\partial E_1}{\partial z}(x, y, z)b dxdy \right] - \left[\frac{\partial E_3}{\partial y}(x, y, z)adx dy + \frac{\partial E_3}{\partial z}(x, y, z)ab dxdy \right].$$

Cancelando los términos señalados por las flechas inclinadas en el párrafo anterior y agrupando los restantes nos queda:

$$dC = \left(\left[\frac{\partial E_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial E_2}{\partial z}(x, y, z) \right] (-a) - \right.$$

$$\left. \left[\frac{\partial E_3}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial E_1}{\partial z}(x, y, z) \right] (-b) + \left[\frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y, z) \right] \right) dxdy =$$

$$dC = (\text{Rot}(\vec{E})(x, y, z) \cdot \vec{N})dxdy,$$

o bien,

$$dC = \text{Rot}(\vec{E})(x, y, z) \cdot \vec{dS},$$

donde

$$\text{Rot}(\vec{E})(x, y, z) = \left[\frac{\partial E_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial E_2}{\partial z}(x, y, z) \right] \vec{i} -$$

$$\left[\frac{\partial E_3}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial E_1}{\partial z}(x, y, z) \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial E_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial E_1}{\partial y}(x, y, z) \right] \vec{k}$$

$$\text{y } \vec{dS} = dxdy\vec{N},$$

Del desarrollo anterior concluimos que la fórmula para el rotacional de un campo \vec{E} es:

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\vec{E})(x, y, z) &= \left[\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z}(x, y, z) \right] \vec{i} - \left[\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z}(x, y, z) \right] \vec{j} \\ &+ \left[\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial y}(x, y, z) \right] \vec{k}. \end{aligned}$$

- Rotacional en términos del operador nabla.

Así como la divergencia de un campo puede verse como el producto punto (o escalar) entre el operador nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ y el campo, el rotacional puede obtenerse como el producto cruz (o vectorial) entre el mismo operador nabla y el campo. Veamos.

Si $\vec{E} = \mathcal{E}_1 \vec{i} + \mathcal{E}_2 \vec{j} + \mathcal{E}_3 \vec{k}$ es el campo, se verifica que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \\ &\left(\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Es decir,

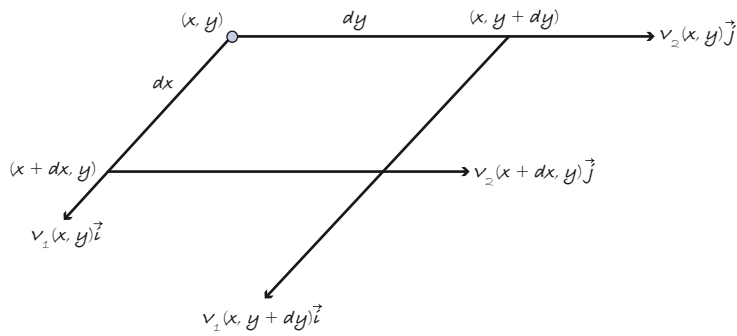
$$\text{Rot}(\vec{E}) = \nabla \times \vec{E}.$$

De esta manera el teorema del rotacional puede reescribirse así:

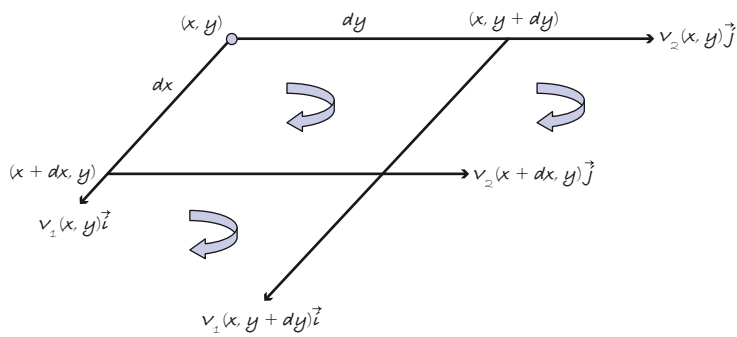
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}.$$

5. El rotacional como medida del giro o rotación en cada punto

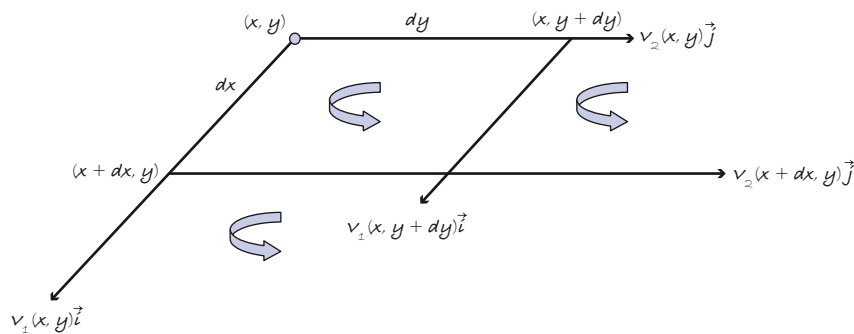
En este punto presentamos una serie de argumentos que nos permiten comprender el porqué del nombre de rotacional para un campo. Para ello imaginemos un fluido con campo de velocidades $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ y consideremos un punto (x, y) ; coloquemos un rectángulo infinitesimal como se indica en el siguiente dibujo donde se han colocado los vectores $v_1(x, y) \vec{i}$ y $v_1(x, y + dy) \vec{i}$ en sus respectivos puntos de aplicación. Lo mismo se ha hecho con los vectores $v_2(x, y) \vec{j}$ y $v_2(x + dx, y) \vec{j}$.



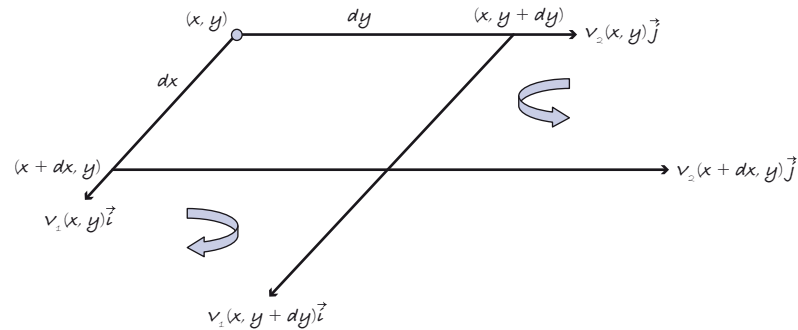
Imaginemos el rectángulo como si flotara en el fluido y que esos vectores indican el empuje que recibe el rectángulo. Por supuesto que el rectángulo se traslada en dirección de $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$, pero podemos apreciar también que al mismo tiempo el rectángulo tiende a girar en el sentido que se indica por la diferencia de empujes en sus lados en el mismo sentido. Veamos la figura siguiente.



Por supuesto que si la situación fuera como se muestra enseguida se tendría un giro, pero ahora en sentido contrario al anterior.



Pero también se puede dar el caso en que se contrapongan los empujes y no sea evidente si el rectángulo girará en un sentido u otro, o que exista un equilibrio y el rectángulo no gire para ninguna de las dos direcciones, como se muestra en la siguiente situación.



Observemos que un “empuje” desigual en cada lado pudiera en principio ocasionar un giro en el rectángulo; la desigualdad de empuje puede averiguarse con el signo de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{v_1(x, y + dy) - v_1(x, y)}{dy} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{v_2(x + dx, y) - v_2(x, y)}{dx}.$$

El rectángulo girará dependiendo de la magnitud de la expresión

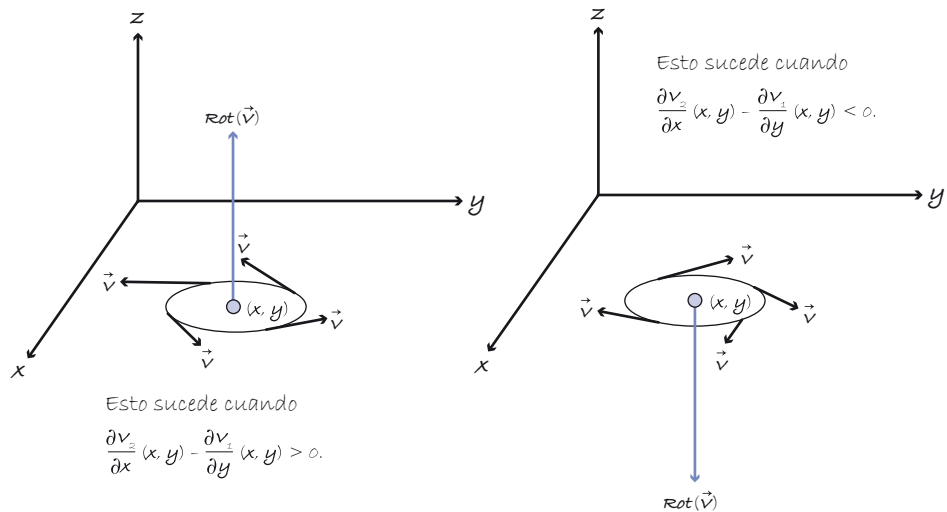
$$\frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y).$$

El rectángulo no gira si esta expresión evaluada en (x, y) es cero (lo que quiere decir que los empujes diferentes en los lados se contrarrestan uno a otro) y el rectángulo tenderá a girar si es diferente de cero; el sentido de giro será según el signo de la expresión.

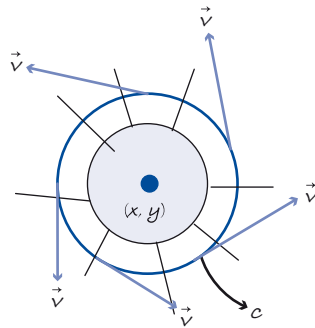
Pero si $\vec{v}(x, y) = v_1(x, y)\vec{i} + v_2(x, y)\vec{j}$ tenemos que

$$\text{Rot}(\vec{v})(x, y) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) \right) \vec{k}.$$

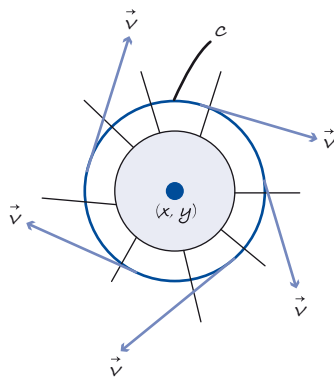
Es decir, la magnitud del rotacional en el punto dice si se gira o no; de hecho, indicará la rapidez del giro. Hacia donde gira nos lo señala el signo de la expresión, y siguiendo la regla de la mano derecha:



Y al colocar un pequeño rehilete en el punto (x, y) dentro del campo de velocidades \vec{v} este girará en contra o a favor de las manecillas del reloj dependiendo de la dirección de $\text{Rot}(\vec{v})(x, y)$.



Un rehilete en el campo \vec{v} gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj cuando $\text{Rot}(\vec{v})$ va en dirección positiva del eje Z .



Un rehilete en el campo \vec{v} gira en el sentido de las manecillas del reloj cuando $\text{Rot}(\vec{v})$ va en dirección negativa del eje Z .

- **Caracterización de los campos gradientes como irrotacionales**

Recordemos que el campo $\vec{V} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ es gradiente si y solo si cumple la condición $\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$; esto significa que los campos gradientes tienen rotacional cero (o son irrotacionales), y viceversa, si un campo tiene rotacional cero (o es irrotacional) entonces es gradiente. Entremos en el detalle de este argumento:

Empecemos suponiendo que $\vec{V} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ es un campo gradiente $\rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$
 $\rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \rightarrow \vec{E} = \text{Rot}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}$, esto es, el rotacional de \vec{V} es cero.

Supongamos ahora que el rotacional de \vec{V} es cero, esto es, $\vec{E} = \text{Rot}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0} \rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} \rightarrow \vec{V} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ es un campo gradiente.

Esto significa que los campos gradientes pueden ser caracterizados como los campos que no rotan o son irrotacionales. Podemos hablar entonces, a grandes rasgos, de una gran clasificación de campos vectoriales en dos categorías: los gradientes o irrotacionales, por un lado, y los campos que sí rotan o tienen rotacional diferente de cero, por otro lado.

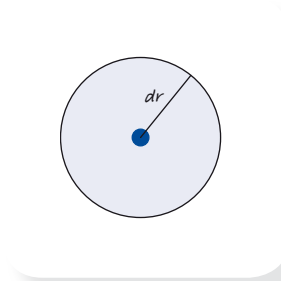
El vector rotacional es entonces un instrumento para determinar qué tipo de campo tenemos, y en caso de que sea diferente de cero, su magnitud $\left| \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|$ es una medida de qué tanto se aparta un campo de ser un campo gradiente.

Así como a una función potencial $z = \varphi(x, y)$ le puede ser sumada una constante arbitraria c y su gradiente sigue siendo el mismo, a un campo primitivo \vec{G} le puede ser sumado un campo gradiente arbitrario $\nabla\varphi$ y su rotacional sigue siendo el mismo; en símbolos:

$$\nabla(\varphi + c) = \nabla\varphi \quad \text{y} \quad \text{Rot}(\vec{G} + \nabla\varphi) = \text{Rot}(\vec{G}).$$

- **El rotacional en términos de la velocidad angular de giro**

Consideremos de nuevo a un fluido laminar, si al colocar un círculo con centro en P y radio infinitesimal dr en el fluido, el círculo gira con rapidez angular ω alrededor del eje perpendicular al plano en el sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces la magnitud de la velocidad lineal del fluido sobre la circunferencia es $dv = \omega dr$.



Y como la circunferencia tiene longitud $dl = 2\pi dr$, la circulación $dCirc$ del fluido a lo largo de ella, que es la velocidad por la longitud de la circunferencia, tiene el valor $dCirc = dv dl = (\omega dr) (2\pi dr) = 2\pi \omega dr^2$. Por otro lado, el área del círculo es

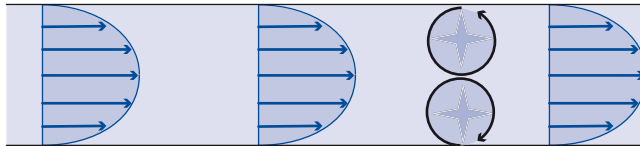
$dA = \pi dr^2$, de tal forma que la circulación del fluido a lo largo de la circunferencia dividida entre área del círculo es $\frac{dCirc}{dA} = \frac{2\pi\omega dr^2}{\pi dr^2} = 2\omega$, y ésta es precisamente la magnitud del rotacional.

Esto significa que la expresión $\left| \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) \right|$ es el doble de la rapidez angular ω que experimenta una partícula de fluido en el punto (x, y) . El signo de la expresión $\frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y)$ define cual es la orientación del giro como quedó establecido.

• El rotacional y el fluido en una tubería

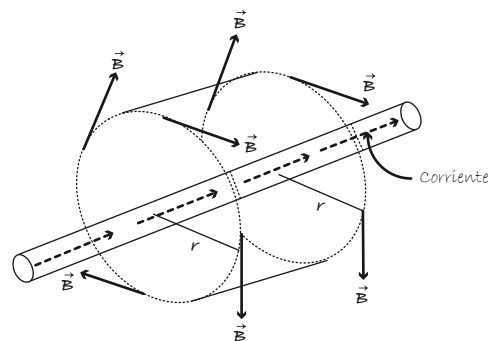
Un campo primitivo \vec{v} tiene rotacional no nulo cuando al colocar en los diferentes puntos del espacio un aspa o rueda de paletas pequeña, la rueda gira como consecuencia de la acción del campo.

Un campo puede tener siempre la misma dirección, como el campo que representa a la velocidad de un fluido sobre una tubería con fricción en las paredes, como a continuación se muestra.



También tener rotacional no nulo, esto es debido a que la diferente magnitud del campo arriba y abajo de las aspas, como los mostrados en la figura anterior, provocará que giren, a menos de que sean colocados en el centro de la tubería.

En contraste, un campo puede ser circular como el campo magnético que genera una línea de corriente y tener rotacional nulo, como veremos más adelante.

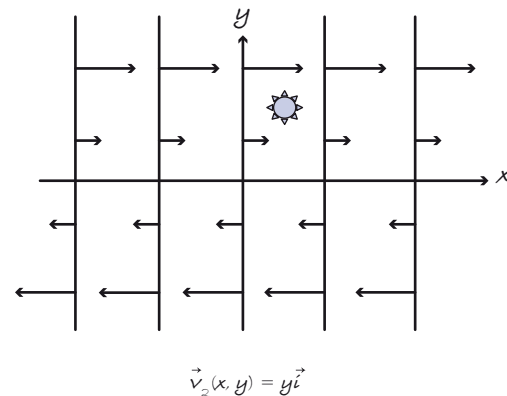
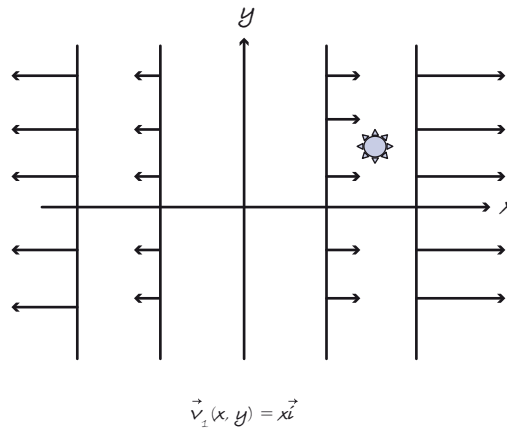


Campo magnético generado por una línea de corriente.

Ejemplos. Por observación directa sobre el dibujo del campo $\vec{v}(x, y) = x\vec{i}$, este tiene rotacional **nulo** ya que una rueda de paletas pequeña colocada en el campo **no gira** debido a que el efecto del campo arriba y debajo de la rueda es el mismo.

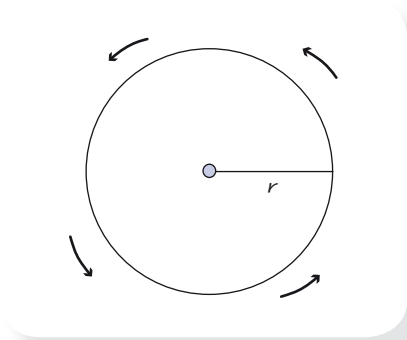
Por observación directa sobre el dibujo del campo $\vec{v}(x, y) = y\vec{i}$, este tiene rotacional *no nulo* ya que una rueda de paletas pequeña colocada en el campo *gira*, debido a que el efecto del campo arriba de la rueda es diferente al efecto del campo debajo de la rueda.

Ambos resultados pueden comprobarse calculando la magnitud del vector rotacional $\left| \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|$.



• **El ejemplo del “disco rígido que gira”, comparado con el campo magnético que genera una línea de corriente**

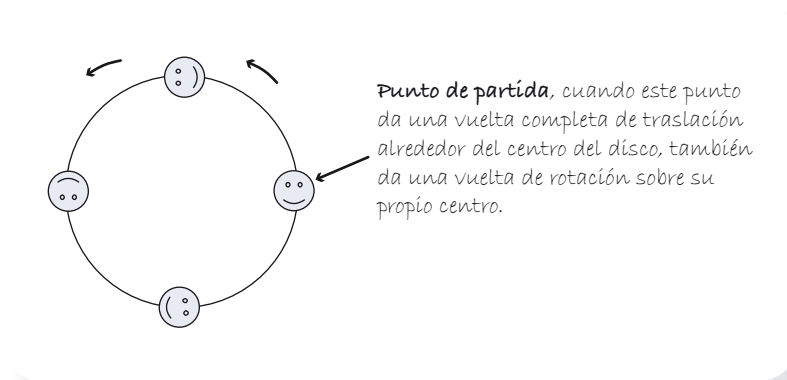
Consideremos a un disco que gira alrededor de su centro (o al plano completo girando alrededor del origen $(0, 0)$) con rapidez angular constante ω .



Lo más sorprendente de este movimiento es que la rapidez angular de cualquier punto en el disco respecto al centro del disco (o el origen) y la rapidez angular con la que gira el punto respecto a él mismo es la misma; representémosla por medio de ω .

Esto se debe a la rigidez del movimiento, o en otras palabras, a que todos los puntos de un radio del disco giran con la misma rapidez angular alrededor del centro del disco.

Para comprobarlo veamos cómo en la siguiente figura se aprecia que el tiempo que tarda una partícula en dar una vuelta completa al centro del disco es el mismo tiempo que tarda en dar una vuelta completa sobre su propio centro.



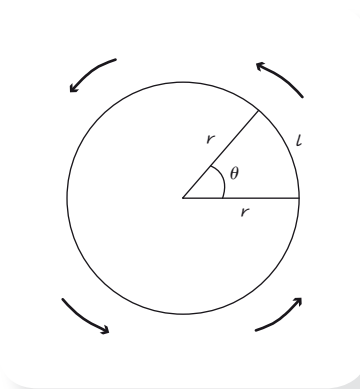
Como la rapidez angular con la que gira el disco es ω , esa es la rapidez angular con la que giran todos los puntos del disco sobre ellos mismos. Si consideramos que el disco gira en el plano xy , el rotacional del campo de velocidades del disco será $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ por lo ya comentado anteriormente en este punto.

Comprobemos este resultado usando a las derivadas parciales de las componentes de la velocidad del movimiento. Tomemos un punto del disco a una distancia r del centro, este punto describirá una trayectoria circular, sean:

r = radio del círculo

θ = ángulo en radianes que forma el radio del punto respecto a un radio fijo

\mathcal{L} = longitud de arco circular, recorrida por el punto, correspondiente al ángulo θ .



Entonces:

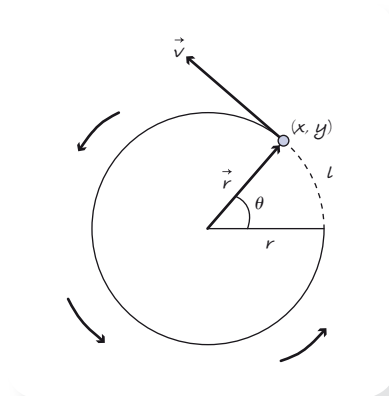
la rapidez angular constante es: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (radianes/s);

la longitud de arco circular es: $l = r\theta$;

la rapidez lineal del punto es: $v = \frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$, esto es, $v = r\omega$ (cm/s).

Lo más importante por notar aquí es que si la rapidez angular ω permanece constante, la rapidez lineal v es mayor en los puntos más alejados del centro, ya que v es proporcional al radio.

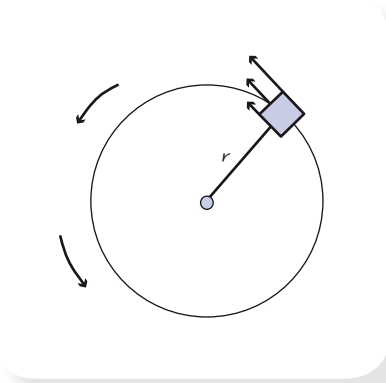
La velocidad lineal en un punto (x, y) es un vector \vec{v} en dirección tangente a la trayectoria circular con centro en el origen que contiene al punto, ya que esta es la dirección del movimiento, y siempre será perpendicular al vector de posición del punto. Su magnitud es la rapidez lineal $v = r\omega$, donde r es la distancia del punto al origen.



El vector $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$ es el vector que cumple estas condiciones e indica un movimiento en el sentido contrario a las manecillas del reloj, su rotacional es $\text{Rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \vec{k} = 2\omega \vec{k}$.

Un argumento intuitivo que nos explica por qué los puntos giran sobre ellos mismos en este movimiento, lo proporciona el siguiente diagrama que presenta a un pequeño cuadrado con centro en un punto a una cierta distancia del centro del disco. Como puede apreciarse, los vectores de velocidad son perpendiculares al vector de posición

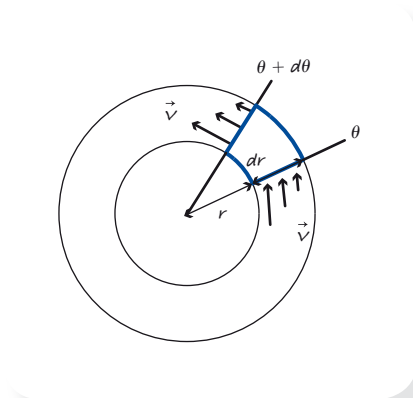
del cuadrado, pero en el lado del cuadrado más alejado del centro la rapidez lineal es mayor, razón por la cual se provoca el giro.



Podemos ahora proporcionar un ejemplo de un remolino alrededor de un centro o eje de giro, sin la rigidez que existe en el movimiento del disco, caso que acabamos de tratar, y en donde el rotacional es cero.

Se trata del campo de velocidades $\vec{v} = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ (y corresponde al campo magnético que genera una línea de corriente). Si calculamos la magnitud de \vec{v} , obtenemos que $|\vec{v}| = \frac{1}{r}$; es decir, la rapidez lineal disminuye con el radio, al contrario de lo que sucede con la función de velocidad $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$, donde la rapidez lineal aumenta con el radio. Los dos campos de velocidades son tangenciales a los círculos con centro en el eje de giro, de hecho, se cumple la fórmula $\vec{v} = \frac{1}{\omega r^2} \vec{v}$.

Si colocamos el eje de giro del fluido dirigido hacia nuestra vista y consideramos una región infinitesimal típica del plano polar, podemos comprobar que la circulación del campo \vec{v} a lo largo del contorno de esa región infinitesimal es cero.

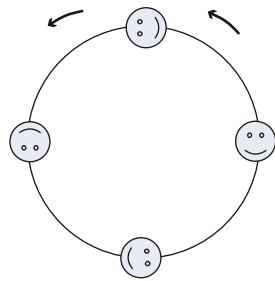


El vector de velocidad \vec{v} es perpendicular a los lados rectos del contorno, así es que ahí no hay circulación, en el lado circular de radio $r + dr$ la rapidez lineal del fluido es constante y toma el valor $\frac{1}{r+dr}$ y, como ese trayecto circular tiene una longitud $(r + dr)d\theta$, la circulación en ese lado es el producto $\frac{1}{r+dr} (r + dr)d\theta = d\theta$. Repitiendo

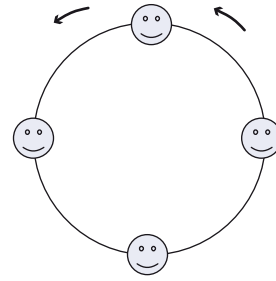
el argumento para el lado circular de radio r , la rapidez lineal del fluido en este lado es constante y toma el valor $\frac{v}{r}$; y como ese trayecto circular tiene una longitud $r d\theta$ la circulación es ese lado es el producto $\frac{v}{r} r d\theta = d\theta$. Es decir, en los dos lados circulares del contorno la circulación es la misma, si hemos de tomar la circulación a lo largo de todo el contorno, tomando como dirección la que va en el sentido contrario a las manecillas del reloj, la circulación a largo del lado circular de radio menor debemos tomarla con signo negativo, y la circulación a lo largo de todo el contorno es cero. El rotacional del campo de velocidades \vec{v} es entonces nulo en cualquier punto fuera del eje de giro. Esto puede comprobarse con la fórmula del rotacional con derivadas parciales, es decir, verificando que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)$. Sin embargo, aunque el rotacional se anule, este campo no puede considerarse como un campo gradiente, como se mencionó anteriormente en este mismo punto (“Caracterización de los campos gradientes como irrotacionales”). Recordemos que la circulación de este campo a lo largo de trayectorias circulares con centro en el origen no es cero, ve por ejemplo la ley de Ampere en la consideración 6 del Tema 4 de la Unidad 2.

Esta aparente discrepancia se puede explicar por el comportamiento singular del campo en las cercanías del origen, de hecho, la magnitud del campo se va a infinito conforme nos acercamos a él; más aún, el campo no está definido ahí.

A diferencia del movimiento producido por el campo de velocidades \vec{v} del disco rígido, que tiene traslación y rotación, el movimiento del campo de velocidades \vec{v} tiene solo traslación, ya que la rotación no se da por ser $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$. Esto nos recuerda lo que sucede con los columpios en una rueda de la fortuna.



Movimiento producido por el campo \vec{v} , corresponde al movimiento de un disco rígido.



Movimiento producido por el campo \vec{v} , es en esencia el movimiento producido por el campo magnético de una línea de corriente.

6. Aplicaciones del rotacional y su teorema

El teorema del rotacional junto con el de la divergencia permite llevar las ecuaciones de Maxwell de la electricidad y el magnetismo de la forma integral a la forma diferencial. En el tema anterior de esta unidad vimos en particular cómo utilizar el teorema de la divergencia para tal fin, en el caso particular de la ley de Gauss. En este punto veremos el paso de la forma integral a la diferencial de la ley de Faraday.

Antes de hacerlo, señalemos algunos hechos importantes en donde está involucrado el rotacional. Primeramente, si se reconoce la relevancia de los campos gradientes, y de

ello hablamos en la Unidad 2, el rotacional puede verse como una caracterización de esos campos: son aquellos cuyo rotacional es cero, o bien, irrotacionales. También en mecánica de fluidos el rotacional es esencial para el estudio de la vorticidad en los fluidos.

Vayamos ahora a la ley de Faraday. En forma de integral esta ley se escribe así:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

En palabras: La circulación del campo eléctrico a lo largo de una curva es el negativo de la razón con la que cambia el flujo magnético a través de una superficie bordeada por la curva. En esta ley se entiende que el campo eléctrico es el que se genera por ser el campo magnético cambiante en el tiempo.

El lado izquierdo de esta ecuación también está involucrado, por el teorema del rotacional (o de Stokes), en la siguiente ecuación:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oiint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}.$$

Combinando las dos ecuaciones se tiene:

$$\oiint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Y como este resultado es igual para cualquier superficie \mathcal{S} de integración, los integrandos deben ser iguales (además de algunos detalles técnicos matemáticos como el de pasar el signo de derivación dentro de la integral en el lado derecho, por ejemplo) se tiene:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt},$$

la cual es la forma diferencial de la ley de Faraday.

7. Divergencia de campos rotacionales

Así como el rotacional de un campo gradiente se anula, la divergencia de un campo rotacional es cero; esto es:

$$\text{Div}(\text{Rot}(\vec{E})) = 0.$$

Este resultado se puede verificar aplicando las fórmulas ya consideradas de la divergencia y el rotacional con base en derivadas parciales (te invitamos a hacerlo) y es consecuencia de la igualdad de las segundas derivadas parciales mixtas de las componentes escalares $E_1(x, y, z)$, $E_2(x, y, z)$ y $E_3(x, y, z)$ del campo \vec{E} .

Podemos explicarnos también este resultado de la siguiente manera: Consideremos un punto del espacio, al tomar una pequeña superficie cerrada \mathcal{S} que lo contenga, la podemos dividir en una cubierta superior y otra inferior con el mismo borde.

El flujo hacia arriba de un campo rotacional es el mismo a través de ambas cubiertas (de hecho, es la circulación de su campo primitivo a lo largo del borde manteniendo a las cubiertas a la izquierda mientras se recorre), por lo que el flujo neto a través de la superficie cerrada es nulo, ya que el flujo en una superficie cerrada debe calcularse hacia afuera de la superficie. Esto último implica que en la cubierta de abajo se debe calcular hacia abajo y no hacia arriba (las circulaciones del campo primitivo a lo largo del borde se toman en sentidos contrarios en las dos cubiertas) y, en consecuencia, la divergencia es cero en el punto considerado.

8. Constantes de integración en los teoremas fundamentales

Así como el gradiente de un campo constante es cero, el rotacional de un campo gradiente es cero y la divergencia de un campo rotacional es cero. Esto explica la naturaleza de la expresión arbitraria que se puede sumar a la antiderivada general en cada uno de los tres teoremas fundamentales de integración. Entremos al detalle.

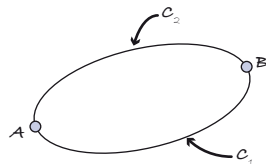
Teorema fundamental para integrales de línea

A una función potencial $z = \varphi(x, y)$ le puede ser sumada una constante arbitraria \mathcal{C} , al hacer esto, su derivada, el gradiente, sigue siendo la misma porque las derivadas parciales de una constante se anulan. Por otra parte el cálculo de la integral de línea evaluando la nueva función potencial en los extremos no cambia porque al efectuar la resta se elimina la constante. En símbolos: $\nabla(\varphi + \mathcal{C}) = \nabla\varphi$.

Teorema fundamental para integrales de superficie (teorema del rotacional, o de Stokes)

A un campo primitivo \vec{F} le puede ser sumado un campo gradiente arbitrario $\nabla\varphi$; al hacer esto, su derivada, el rotacional, sigue siendo la misma porque el rotacional de un campo gradiente es cero. Por otra parte, el cálculo del flujo del rotacional (integral de superficie) integrando al nuevo campo primitivo a lo largo del borde de la superficie no se altera porque al integrar el campo gradiente $\nabla\varphi$ a lo largo del borde se obtiene el valor de cero, ya que el borde es una curva cerrada. En símbolos:

$$\text{Rot}(\vec{F} + \nabla\varphi) = \text{Rot}(\vec{F}).$$



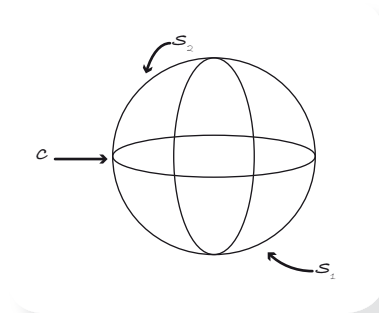
$$\int_{\text{borde}} \nabla\varphi \cdot \overline{dl} = \int_{c_1}^B \nabla\varphi \cdot \overline{dl} + \int_{c_2}^A \nabla\varphi \cdot \overline{dl} = 0,$$

$$\text{Ya que } \int_{c_1}^B \nabla\varphi \cdot \overline{dl} = \int_{c_2}^B \nabla\varphi \cdot \overline{dl}.$$

Teorema fundamental para integrales de volumen (teorema de la divergencia, o de Gauss)

A un campo \vec{F} le puede ser sumado un campo rotacional arbitrario $\text{Rot}(\vec{V})$; al hacer esto, su derivada, la divergencia, sigue siendo la misma porque la divergencia de un campo rotacional es cero. Por otra parte, el cálculo de la integral de volumen de la divergencia del campo, integrando al nuevo campo a través de la superficie exterior, no se altera porque al integrar el campo $\text{Rot}(\vec{V})$ a través de la superficie exterior se obtiene el valor de cero ya que la superficie es cerrada. En símbolos:

$$\text{Dív}[\vec{F} + \text{Rot}(\vec{V})] = \text{Dív}(\vec{F}). \text{ Ve la figura y el recuadro siguiente.}$$



$$\int_{\text{exterior}} \text{Rot}(\vec{V}) \cdot \vec{ds} = \iint_{S_1} \text{Rot}(\vec{V}) \cdot \vec{ds} + \iint_{S_2} \text{Rot}(\vec{V}) \cdot \vec{ds} = 0.$$

Ya que $\iint_{S_1} \text{Rot}(\vec{V}) \cdot \vec{ds} = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{dl}.$

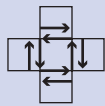
$$\iint_{S_2} \text{Rot}(\vec{V}) \cdot \vec{ds} = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{dl}.$$

Se integra a lo largo de C en sentido de las manecillas del reloj.

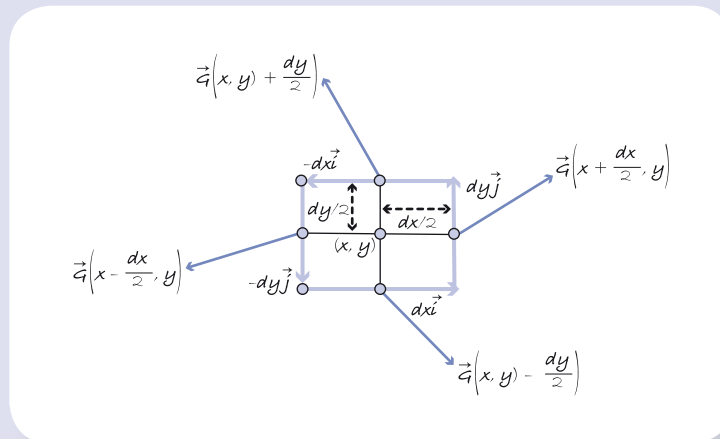
Se integra a lo largo de C en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

9. Una visión general de los teoremas fundamentales

En este último punto queremos mostrar los elementos que tienen en común los tres teoremas fundamentales que hemos tratado en este Tomo 3: el teorema fundamental de las integrales de línea, el teorema de la divergencia (o de Gauss) y el teorema del rotacional (o de Stokes). A su vez queremos relacionarlos con el llamado teorema fundamental del Cálculo que fue desarrollado y utilizado en los tomos previos de esta obra y que corresponden al llamado Cálculo de una variable.

Teorema Elemento de similitud	TFC para integrales de línea $\int_A^B \nabla \varphi \cdot \overline{dl} = \varphi$ $\varphi(B) - \varphi(A)$	TFC para integrales de superficie $\iint_S \text{Rot}(\vec{F}) \cdot \overline{ds} = \oint_C \vec{F} \cdot \overline{dl}$	TFC para integrales de volumen $\iiint_{\mathcal{R}} \text{Div}(\vec{F}) dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \overline{ds}$	TFC del cálculo de una variable $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$
Derivada (el integrando de la integral principal)	$\nabla \varphi$ es la derivada de φ	$\text{Rot}(\vec{F})$ es la derivada vectorial de \vec{F}	$\text{Div}(\vec{F})$ es la derivada escalar de \vec{F}	$f'(x)$ es la derivada de $f(x)$
Antiderivada	φ	\vec{F}	\vec{F}	$f(x)$
Región de integración	La curva C	La superficie S	El sólido \mathcal{R}	El intervalo (a, b)
Frontera de integración	Los extremos A y B de la curva C	El borde C de la superficie S	La cubierta S del sólido \mathcal{R}	Los extremos a y b del intervalo (a, b)
Efecto de telescopicidad en la región de integración+ $[\varphi(p)] - \varphi(q)$ + $[\varphi(r) - \varphi(p)] +$		 $[f(x+dx) - f(x)] +$ $[f(x+2dx) - f(x+dx)]$
Operación de la antiderivada en la frontera	Se resta el valor de la función potencial φ en los extremos de la curva C	Se calcula la circulación del campo \vec{F} a lo largo del borde C de S	Se calcula el flujo del campo \vec{F} a través de la cubierta S del sólido \mathcal{R}	Se resta el valor de $f(x)$ en los extremos del intervalo $[a, b]$
Constante de integración	c ↓	$\nabla \psi$ ↓	$\text{Rot}(\vec{G})$ ↓	c ↓
Antiderivada general	$\varphi + c$	$\vec{F} + \nabla \psi$	$\vec{F} + \text{Rot}(\vec{G})$	$f(x) + c$
Derivada nula de la constante de integración	$\nabla(c) = 0$	$\text{Rot}(\nabla \psi) = 0$	$\text{Div}(\text{Rot}(\vec{G})) = 0$	$\frac{dc}{dx} = 0$
Efecto nulo de la constante de integración en la frontera	$c(B) - c(A) = c - c = 0$	$\oint_C \nabla \psi \cdot \overline{dl} = 0$ El trabajo de un campo gradiente a lo largo de una curva cerrada siempre es cero	$\oiint_S \text{Rot}(\vec{G}) \cdot \overline{ds} = 0$ El flujo de un campo rotacional a través de una superficie cerrada siempre es cero	$c(b) - c(a) = c - c = 0$
Versión infinitesimal del teorema	$d\varphi = \nabla \varphi \cdot \overline{dl}$	$d\text{Circ} = \text{Rot}(\vec{F}) \cdot \overline{dl}$	$d\text{Flujo} = \text{Div}(\vec{F}) dV$	$dy = f'(x) dx$

1. Para un campo primitivo $\vec{G}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ el rotacional del campo en un punto (x, y) puede obtenerse mediante la fórmula: $\text{Rot}(\vec{G})(x, y) = \frac{d\text{Circ}}{dA}\vec{k}$. En esta fórmula, dA es el área de una región infinitesimal que incluye al punto (x, y) , y $d\text{Circ}$ es la circulación del campo primitivo a lo largo de la frontera de esa región tomada en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Para efectos de operación en un caso concreto, la región infinitesimal puede tomarse como un rectángulo de dimensiones dx y dy con centro en (x, y) , como se aprecia en la siguiente figura.



Calcula para cada uno de los siguientes campos de fuerzas:

- $\vec{G}(x, y) = (2 + 4x + 6y)\vec{i} + (1 + 5x + 3y)\vec{j}$
- $\vec{G}(x, y) = (5 - 4x + 2y)\vec{i} + (1 + 3x + 7y)\vec{j}$
- $\vec{G}(x, y) = (c_1 + a_1x + b_1y)\vec{i} + (c_2 + a_2x + b_2y)\vec{j}$

Primero, el diferencial de circulación $d\text{Circ}$ en un punto arbitrario (x, y) considerando los elementos de la figura superior.

Segundo, el cociente $\frac{d\text{Circ}}{dA}$ que a asociado a la magnitud del vector $\text{Rot}(\vec{G})(x, y) = \frac{d\text{Circ}}{dA}\vec{k}$.

Tercero, el vector $\text{Rot}(\vec{G})(x, y) = \frac{d\text{Circ}}{dA}\vec{k}$.

2. Si el campo primitivo es $\vec{E}(x, y) = E_1(x, y)\vec{i} + E_2(x, y)\vec{j}$, establece la fórmula con derivadas obtenida para el rotacional de \vec{E} , calculando el diferencial de circulación $d\text{Circ}$ del campo correspondiente al punto (x_0, y_0) , pero sustituyendo a las funciones $E_1(x, y)$ y $E_2(x, y)$ por las expresiones de los planos tangentes en (x_0, y_0) a sus gráficas, a saber:

Sustituyendo $E_1(x, y)$ por $c_0 + \frac{\partial E_1}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial E_1}{\partial y}(x_0, y_0)y$.

Sustituyendo $E_2(x, y)$ por $c_1 + \frac{\partial E_2}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial E_2}{\partial y}(x_0, y_0)y$.

3. a) Obtén el rotacional de los siguientes campos:

i) $\vec{q}(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{i} + xy\vec{j}$

ii) $\vec{q}(x, y) = (x^2y^2)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$

iii) $\vec{q}(x, y) = ye^x\vec{i} + e^x\vec{j}$

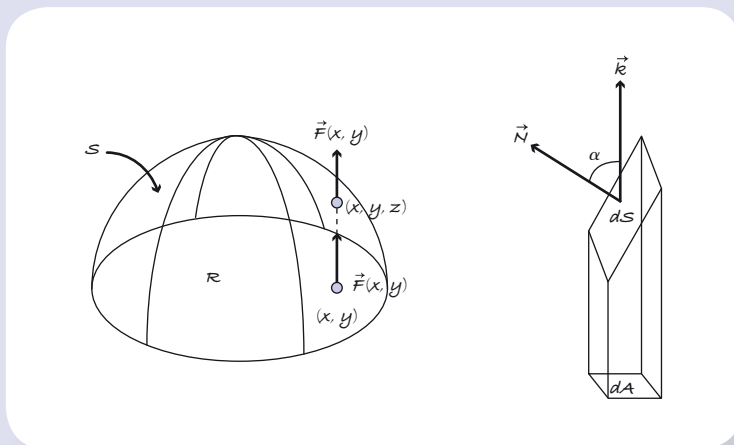
b) Obtén el flujo en la dirección del eje z y a través de la compuerta cuadrada en el plano xy definida por las desigualdades $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$, del rotacional de cada uno de los campos del inciso anterior, mediante el cálculo de la correspondiente integral de superficie.

c) Calcula ahora la circulación en el sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo del borde de la compuerta cuadrada en el plano xy definida por las desigualdades $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$ de cada uno de los campos listados en el inciso a).

d) ¿Qué puedes decir de las respuestas obtenidas v los incisos b) y c)?

e) ¿Qué podemos decir del rotacional de un campo primitivo \vec{q} que es gradiente como el del punto iii)?

4. Sea $\vec{q}(x, y) = f(x, y)\vec{k}$ un campo y sea S una superficie en el espacio cuyo borde es la curva C en el plano xy . Sea R la proyección de la superficie S en el plano xy .



Utiliza la fórmula $dA = dS \cos \alpha$, donde dS es el área de una porción infinitesimal de una superficie S , dA es el área de la proyección en el plano xy de dicha porción infinitesimal, y α es el ángulo que forma el vector normal a la porción infinitesimal de superficie con la vertical, para verificar que el flujo del campo $\vec{F}(x, y)$ a través de la superficie S coincide con el flujo del campo $\vec{F}(x, y)$ a través de la proyección R en el plano xy . ¿Sucede lo mismo con cualquier campo que dependa también de la variable z , es decir, con campos de la forma $\vec{q}(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{k}$?

5. Sabemos que si un fluido laminar se desplaza de acuerdo con el campo de velocidades $\vec{v}(x, y)$, la circulación "círc" del fluido a lo largo de una pequeña curva cerrada C en el plano, en sentido contrario a las manecillas del reloj, puede aproximarse con la fórmula:

$$\text{Círc} \approx \text{Rot}(\vec{v})(x_0, y_0) \cdot \vec{A}$$

donde (x_0, y_0) es un punto interior a la curva cerrada C , y \vec{A} es un vector de magnitud A (el área de la región encerrada por la curva C) y en dirección del eje z , es decir, $\vec{A} = A\vec{k}$.

Si $\vec{v}(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{i} + xy\vec{j}$. Calcula la circulación aproximada a lo largo de c si:

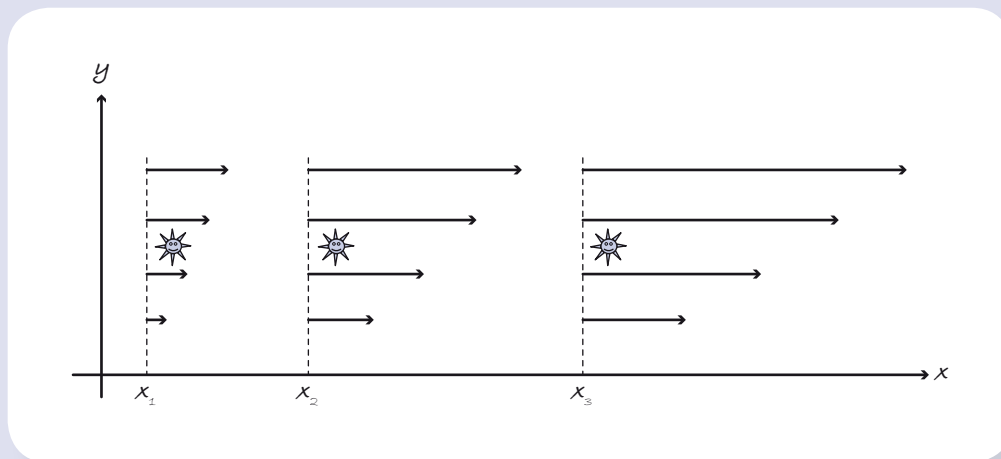
- c es la frontera de un cuadrado con centro en $(1, 2)$, cuyas aristas tienen 0.05 de longitud.
 - c es la circunferencia con centro en $(1, 2)$ y radio 0.01 .
- El campo de velocidades laminar de un disco que gira es $\vec{v}(x, y) = -4y\vec{i} + 4x\vec{j}$. ¿Cuál es la velocidad angular ω con la que giran los reguiletes colocados en cualquier punto de este campo?
 - Un fluido se traslada a lo largo de una tubería recta con cortes transversales circulares de 4 cm de radio con una rapidez igual a $(4 - r) \text{ cm/s}$, donde r es la distancia radial de cualquier punto en el interior de la tubería a su línea central. Explica por qué en la línea central de la tubería el rotacional del campo de velocidades es nulo.
 - Considera al campo de velocidades laminar $\vec{v}(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
 - Verifica que este campo es tangencial a las circunferencias con centro en el origen y además es unitario, es decir $|\vec{v}(x, y)| = 1$.
 - Realiza un análisis infinitesimal para el campo $\vec{v}(x, y)$ similar al realizado para el campo $\vec{v} = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ en la consideración 5 de la SP-13 para determinar si el campo $\vec{v}(x, y)$ es, o no es, un campo irrotacional.

9. Determina el rotacional de los siguientes campos.

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $v_1(x, y, z) = x\vec{i}$ | b) $v_2(x, y, z) = y\vec{i}$ | c) $v_3(x, y, z) = z\vec{i}$ |
| d) $v_4(x, y, z) = x\vec{j}$ | e) $v_5(x, y, z) = y\vec{j}$ | f) $v_6(x, y, z) = z\vec{j}$ |
| g) $v_7(x, y, z) = x\vec{k}$ | h) $v_8(x, y, z) = y\vec{k}$ | i) $v_9(x, y, z) = z\vec{k}$ |

Explica en términos de giros de rehiletes colocados sobre estos campos por qué algunos de ellos son irrotacionales y otros no.

- En la siguiente figura se observan algunos vectores que dan cuenta del comportamiento de un campo laminar \vec{v} . Explica por qué el campo no es irrotacional e indica en qué dirección van los vectores del campo $\text{Rot}(\vec{v})$.



- Comprueba el teorema del rotacional para $\vec{v} = (2x + 3y^2)\vec{i} + (4xy^2)\vec{j}$ en la región del plano xy descrita por las desigualdades $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 3$.

12. Demuestra que:

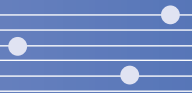
- a) $\nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{0}$ (el rotacional de un gradiente es cero)
- b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0$ (la divergencia de un rotacional es cero)

Utiliza las fórmulas de gradiente, rotacional y divergencia que emplean derivadas parciales y toma en cuenta la igualdad de segundas derivadas parciales mixtas.

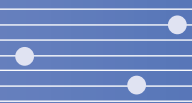
- 13. a) Caracteriza mediante tres frases distintas a los campos gradientes.
- b) Caracteriza mediante tres frases distintas a los campos rotacionales.
- 14. a) ¿Cuál es la constante de integración que podemos agregar al campo primitivo al calcular la integral de superficie (flujo) de su campo rotacional?
- b) ¿Cuál es la constante de integración que podemos agregar a un campo al calcular la integral de volumen de su divergencia?

15. Cuando una nube de carga eléctrica se desplaza, se considera el vector $\vec{j}(x, y, z)$, llamado vector densidad de corriente. Este vector indica la dirección en que la carga se mueve en cualquier punto del espacio. Si S es una superficie que contiene al punto (x, y, z) , y $d\vec{S}$ un vector diferencial de superficie correspondiente a ese punto, el producto punto $\vec{j}(x, y, z) \cdot d\vec{S}$ nos da el flujo dF (en coulombs por unidad de tiempo) a través de la porción infinitesimal de área dS de la superficie. Como la carga está en movimiento se genera un campo magnético \vec{B} . La ley de Ampere en forma diferencial afirma que el rotacional de \vec{B} es proporcional a \vec{j} en todo punto del espacio, es decir, $\text{Rot}(\vec{B})(x, y, z) = k\vec{j}(x, y, z)$. Por otra parte, el teorema del rotacional de Stokes afirma que:

$$\iint_S \text{Rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$
 para cualquier superficie S con borde C . Sustituye en esta última ecuación a $\text{Rot}(\vec{B})$ por su equivalente y establece la ley de Ampere en forma integral. ¿Cómo puedes expresar en palabras esta ley?



A large, light blue rounded rectangular area containing horizontal lines for writing notes.



A large, light blue rounded rectangular area containing horizontal lines for writing notes.

Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos, Tomo III es una obra que resume el cálculo de funciones de varias variables. Con este último libro se completa la colección de tres tomos que solucionan la preocupación de los autores por construir una propuesta de enseñanza-aprendizaje útil y clara para los lectores. Cabe destacar que esta propuesta pretende darle valor al Cálculo como una poderosa herramienta en el estudio de distintos campos disciplinares, en los que los estudiantes están inmersos como parte de su preparación académica.

La estrategia didáctica implementada en este **Tomo III** es resaltar conceptos, procesos y resultados propios del Cálculo de variables en el camino de la matematización a partir de dos ideas de la Física: flujo y circulación. Al describir matemáticamente estas nociones, en esta obra se pueden distinguir conceptos como función de variables, derivadas parciales, gradientes, derivadas direccionales, integrales de línea, de superficie y de volumen, entre otras. La elección del flujo y la circulación fue favorecida por la contundente apreciación de Richard Feynman sobre la importancia que éstas tienen para la Física; él afirma en sus lecciones que sólo con ellas es posible describir todas las leyes de la electricidad y magnetismo.

Partiendo de situaciones concretas y simples se apreciará la consecución de teoremas fundamentales como el de la Divergencia y del Rotacional. De hecho, se enfatiza la idea de que en realidad estos teoremas, junto con el de las integrales de línea, guardan estrecha relación con el llamado teorema fundamental del Cálculo, que se estudió en los tomos anteriores; esta característica resalta la coherencia de la propuesta desarrollada a lo largo de esta colección.

